

TARTU ÜLIKOOL  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Füüsika instituut

**Spinn-3/2 osakeste Comptoni hajumine  
Rarita-Schwingeri teoorias**

Bakalaureusetöö (12 EAP)  
Füüsika eriala

Priidik Gallagher

Juhendaja: Stefan Groote, PhD

Tartu 2018



# Spinn-3/2 osakeste Comptoni hajumine

## Rarita-Schwingeri teoorias

Comptoni hajumine on nii eksperimentaalselt kui ka teoreetiliselt huvipakkuv mitmekülgne hajumisnähtus. Kuigi elementaarseid spinn- $\frac{3}{2}$  osakesi ei ole veel avastatud, on teoreetiliselt huvipakkuv uurida, millised iseärasused on spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste Comptoni hajumisel. Sel eesmärgil on lõputöös kasutatud Rarita-Schwingeri teooriat puu tasemel Comptoni hajumise Feynmani diagrammide arvutamiseks. Postuleeritakse vajalikus ulatuses Feynmani reeglid ja antakse ülevaade arvutuskäigust, mille lõpptulemus leiti sümbolarvutussüsteemiga FORM. Võrreldakse Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  ja Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria tulemusi ning tingliku eksperimentaalse võrdluse huvides antakse ülevaade prootonite Comptoni hajumisest  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas. Töö lõpus antakse lühiülevaade Rarita-Schwingeri teooria sisemistest vastuoludest, mida püüavad täpsemad teooriad kõrvaldada.

Märksõnad: Comptoni hajumine, Rarita-Schwingeri teooria, spinn- $\frac{3}{2}$ , kõrge energia füüsika, kõrgema spinni teooria.

CERCS: **P210** — Elementaarosakeste füüsika, kvantväljade teooria.

## Compton scattering of spin-3/2 particles in the

## Rarita-Schwinger theory

Compton scattering is an extensive scattering phenomenon of both experimental and theoretical interest. Although no elementary spin- $\frac{3}{2}$  particles have yet been discovered, it is of theoretical interest to investigate the features that spin- $\frac{3}{2}$  particles' Compton scattering might possess. For this purpose the present thesis uses Rarita-Schwinger's theory to calculate tree-level Feynman diagrams. Feynman rules are postulated in the required extent and an overview of the computation is given, which was finished with the symbolic manipulation system FORM. The results of Dirac's spin- $\frac{1}{2}$  and Rarita-Schwinger's spin- $\frac{3}{2}$  theory are compared and an overview of Compton scattering of protons in the  $\Delta^+$ -resonance region is given for tentative experimental comparison. Finally, a short overview is given of the contradictions in the Rarita-Schwinger theory, that more accurate theories attempt to solve.

Keywords: Compton scattering, Rarita-Schwinger's theory, spin- $\frac{3}{2}$ , high energy physics, higher spin theory.

CERCS: **P210** — Elementary particle physics, quantum field theory.



# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>7</b>
<b>1 Comptoni hajumine Diraci teoorias</b>	<b>9</b>
1.1 Spinn- $\frac{1}{2}$ teooria formalism . . . . .	10
1.2 Feynmani reeglid . . . . .	12
1.3 Mõjuristlõige . . . . .	14
1.4 Feynmani diagrammid ja üleminekuamplituudid . . . . .	15
1.5 Lorentzi-invariantne faasiruum . . . . .	18
<b>2 Comptoni hajumine Rarita-Schwingeri teoorias</b>	<b>19</b>
2.1 Rarita-Schwingeri formalism . . . . .	19
2.2 Spinn- $\frac{3}{2}$ väli . . . . .	21
2.3 Elektromagnetinteraktsioon spinn- $\frac{3}{2}$ välja jaoks . . . . .	22
2.3.1 Propagaator . . . . .	23
2.3.2 Verteks . . . . .	24
2.3.3 Feynmani reeglid . . . . .	24
2.4 Feynmani diagrammid ja üleminekuamplituudid . . . . .	25
<b>3 Diraci teooria ja Rarita-Schwingeri teooria tulemuste võrdlus</b>	<b>30</b>
3.1 Funktsionaalne kuju ja täismõjuristlõige . . . . .	31
3.2 Mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga . . . . .	33
<b>4 Teoreetiliste tulemuste võrdlus eksperimentaalsete andmetega</b>	<b>36</b>
4.1 Spinn- $\frac{1}{2}$ osakeste Comptoni hajumine . . . . .	36
4.2 Prootonite Comptoni hajumine $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas . . . . .	37
<b>5 Vastuolud Rarita-Schwingeri teoorias</b>	<b>41</b>
5.1 Velo-Zwanzigeri probleem . . . . .	41
5.2 Johnson-Sudarshani probleem . . . . .	43
5.3 Muud probleemid ja võimalikud lahendused . . . . .	43

<b>Kokkuvõte</b>	<b>45</b>
<b>Kasutatud kirjandus</b>	<b>47</b>
<b>Lisad</b>	<b>53</b>
<b>A Kokkulepped</b>	<b>53</b>
<b>B Jälgede arvutusvalemid</b>	<b>54</b>
<b>C Spinn-<math>\frac{1}{2}</math> teooria jälgede arvutamine</b>	<b>55</b>
C.1 Jälgavaldis $ \mathcal{M}_1 ^2$ jaoks . . . . .	55
C.2 Jälgavaldis $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2}$ jaoks . . . . .	56
<b>D Faasiruumi integreerimine</b>	<b>57</b>
<b>E Rarita-Schwingeri teooria tuletuskäigud</b>	<b>59</b>
E.1 Lagranžiaani invariantus . . . . .	59
E.2 Propagaatori arvutamine . . . . .	61
E.3 Üleminekuamplituudide teisendamine . . . . .	63
E.3.1 Verteksi ja propagaatori adjungeerimine . . . . .	63
E.3.2 Üleminekuamplituudide kombinatsioonide ilmutatud avaldised . . . . .	64
<b>F FORM</b>	<b>66</b>
F.1 FORMi programmi algkood . . . . .	66
F.2 FORMi tulemused . . . . .	68
<b>G Diferentsiaalse mõjuristlõike teisenemine</b>	<b>70</b>

# Sissejuhatus

Comptoni hajumine ja Comptoni efekt on füüsika ajalukku läinud kui nähtused, mis põhjendavad nii relativistlikku kui ka kvantmehhaanilist maailmakäsitlust. Tegu on ka laiaulatusliku nähtusega, millel on palju alamliike ning ilminguid. Niisuguse tausta korral on huvipakkuv uurida Comptoni hajumist kõrgema spinniga osakeste jaoks, valides konkreetsuse ja lihtsuse huvides spinn- $\frac{3}{2}$  osakesed. Kõrgema kui spinniga 1 elementaarseid osakesi ei ole veel avastatud, aga teoreetilise maailmakäsitluse täiustamise huvides on kõrgema spinni Comptoni hajumise käsitlemine põhjendatud. Samas on avastatud komposiitosakesi (näiteks  $\Delta$ -barüonid), millel on spinn- $\frac{3}{2}$ , mistõttu sobiva kõrgema spinni teooria arendamine on ka praktiliselt oluline.

Ühe lihtsama kõrgema spinni teooria pakkusid välja W. Rarita ja J. Schwingeri (edaspidi Rarita-Schwinger, RS), kuigi see ei ole ainuke võimalus kõrgema spinni kirjeldamiseks. Rarita-Schwingeri teooria võimaldab kirjeldada mistahes spinn- $(n + \frac{1}{2})$  osakesi, aga antud juhul piiratakse just spinn- $\frac{3}{2}$  osakestega. Spinni täpsem käsitlemine on üldsegi võimalik välja- ja rühmateoreetiliselt, näiteks Rarita-Schwingeri teooria põhisuurused moodustatakse otsekorrutisena 4-vektoresitusest ja Diraci spiinoresitusest. Kahjuks ei ole küll Rarita-Schwingeri teooria vaba seesmistest probleemidest, kuid siiski võib ta sobida hinnanguks potentsiaalsete spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste Comptoni hajumisele, praktiliseks harjutuseks kvantväljateoorias, aluseks erinevate kõrgema spinni teooriate võrdlemiseks ning eriti just sissejuhatajateks täpsematesse teooriatesse, mis püüavad lahendada Rarita-Schwingeri teooria vastuolusid.

Käesoleva töö eesmärk on anda Comptoni hajumise kirjeldus spinn- $\frac{3}{2}$  teoorias. Comptoni efekti elementaarne kirjeldus on antav juba erirelatiivsusteoorias, aga täielik kirjeldus, s.o diferentsiaalse mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga (või footonite lõppimpulsi vms) on võimalik üksnes kvantväljateoorias. Sealjuures tegu ei ole täpselt lahenduva kvantväljateooriaga (ning täpselt lahenduvaid teooriad on vähe), mistõttu tulemusi on võimalik saada üksnes ligikaudsete arvutusmeetoditega — häiritusteooria abil.

Kvantväljateoreetilised arvutused juhatatakse sisse peatükis 1 Comptoni hajumise kirjeldusega Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teoorias, s.o tuletatakse Kleini-Nishina valem. Selleks arvutatakse madalaimat järku häiritusteoorias tekkivad puu tasemel Feynmani diagrammid. Töö põhiosas peatükis 2 tehakse samad arvutused Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teoorias. Analüüs viiakse läbi lagranžiaanipõhiselt ning interaktsioon elektromagnetväljaga tuuakse sisse minimaalse asenduse

teel, mis võimaldab võrdlemisi lihtsasti postuleerida otsesteks arvutusteks vajaminevad Feynmani reeglid. Tegu ei ole esimese uuringuga Comptoni hajumisest Rarita-Schwingeri teoorias, mistõttu tulemusi kontrollitakse varasematega. Teooriate põhitulemusi, diferentsiaalsete mõjuristlõigete ja täismõjuristlõigete jaotusi, võrreldakse peatükis 3. Peatükis 4 võrreldakse spinn- $\frac{1}{2}$  teooria ja Rarita-Schwingeri teooria ennustusi eksperimentaalandmetega prootonite Comptoni hajumise jaoks  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas, kus elementaarsete spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste lähendusena on kasutatud komposiitseid spinn- $\frac{3}{2}$   $\Delta^+$ -barüone. Lõpetuseks antakse peatükis 5 lühiülevaade Rarita-Schwingeri teoorias esinevatest probleemidest ja nende lahenduskatsetest, et anda taust tulemuste usaldatavuse küsimusele ja juhatada sisse Rarita-Schwingeri teooria põhised täpsemad kõrgema spinni käsitlused. Suur osa tuletuskäikudest on kirjutatud lisadesse, et lühendada töö põhiosa mahtu. Töös kasutatud kokkulepped on esitatud lisas A.

Kuna uurimisprobleemialast teooriat on väga palju, on teoreetiline ülevaade toodud jooksvalt ja lühidalt põhitöö sees<sup>1</sup> ainult otseselt vajaminevas ulatuses, eraldi teooria ülevaatepeatükki ei ole. Näiteks on seetõttu ülevaade väljateooriast, kvantväljateooriast ja rühmateooriast antud ainult selles ulatuses, mis on kõige lähemalt tööga seotud ning üldisem taust on jäetud kõrvale; Feynmani reeglid on toodud sisse ainult postulatiivselt jne.

Töö autor soovib väga tänada oma juhendajat dr Stefan Grootet mõistva suhtumise ja abi eest töö läbiviimisel ja kirjutamisel.

---

<sup>1</sup>Paralleelselt bakalaureusetööga koostas autor Vikipeediasse artikli “Comptoni hajumine”.



# 1. Comptoni hajumine Diraci teoorias

Comptoni hajumine on elektromagnetkiirguse mitteelastne hajumine vabadelt laetud osakestelt [1]. Tihti peetakse silmas vabasid (vabadena käsitletavaid) elektrone, mis võivad paikneda aatomite välistes elektronkihtides, kuigi on näiteks võimalik ka hajumine aatomituumadelt [2]. Hajumisel ilmneb Comptoni efekt, mis seisneb kiirguse võnkesageduse vähenemises, kiirguse energia kaotamises osakestele energia üleandmise tõttu.

Comptoni hajumine on füüsika ajaloo seisukohast oluline hajumisnähtus kvantmehhaanilise maailmakäsitluse põhjendamisel ja kinnistamisel, footonite olemasolu näitamisel; näiteks klassikalisest elektrodünaamikast tuntud Thomsoni hajumise korral on hajunud kiirgus sama lainepikkusega kui madalaenergialine pealelanguenud kiirguski, mis on vastuolus Comptoni efektiga. Täieliku hajumise kirjelduse andmine oli kvantelektrodünaamika üks esimestest ülesannetest, see on võimalik Kleini-Nishina valemi abil [3]. Comptoni hajumist on kasutatud ka muudes eksperimentaalsetes uuringutes, näiteks energia ja impulsi jäävuse kinnitamisel elementaarinteraktsioonides [4–6], ning temaga on seotud palju lähedasi nähtusid, näiteks Comptoni pöördhajumine (kiirguse energia kasv hajumisel, üks olulistest mikrolainelise taustkiirguse kõikumise põhjustest [7]), mitmekordne Comptoni hajumine (lõppolekus mitu footonit, näiteks kahekordsel juhul [8–10], aga sama nimega tähistatakse ühe footoni mitut järjestikust elementaarhajumist, nt [11]), magnetiline Comptoni hajumine (hajumine magneeditud keskkonnas ringpolariseeritud kiirgusega, lühiülevaade artiklis [12]), mittelineaarsed efektid jne. Käesolevas töös vaadatakse üksnes tavalist Comptoni hajumist

$$e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma, \quad (1.0.1)$$

kus elektroni  $e^-$  võib asendada mistahes teise sobiva tegeliku või hüpoteetilise elementaarse laetud osakesega.

Comptoni efektis ilmneb lainepikkuste nihe

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad (1.0.2)$$

kus  $\lambda$  on algse ja  $\lambda'$  hajunud kiirguse lainepikkus,  $h$  on Plancki konstant,  $m_e$  osakese (elektroni) mass ja  $\theta$  hajumisenurk. Selle valemi avaldas juba A. H. Compton [1] ning ta on tuletatav kinemaatilistest kaalutlustest erirelatiivusteooria piirides, kui eeldada Plancki hüpoteesi kehtimist. Suurust  $\frac{h}{m_e c} \approx 2,43 \cdot 10^{-12}$  m nimetatakse (elektroni) Comptoni lainepikkuseks. Võib defineerida

taandatud Comptoni lainepikkuse  $\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} \approx 0,39 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  (kus  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ).

Hajumise täielik kirjeldus, mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga, on võimalik üksnes kvantväljateoorias kvantelektrodünaamika piirides. Kleini-Nishina valem on juba hästi tuntud tulemus, kuid kvantelektrodünaamika formalismi tutvustamise, tavalise Comptoni hajumise analüüsi ja kvantväljateoreetiliste arvutuste tutvustamise eesmärgil on analüüs ilmutatult esitatud. Suur osa meetoditest on üle kantavad ka Rarita-Schwingeri teooriale.

## 1.1 Spinn- $\frac{1}{2}$ teooria formalism

Spinn- $\frac{1}{2}$  teooria põhisuurusteks on bispiinorväljad  $\psi(x)$ . Spinniga objekte võib käsitleda rühmateoorias, mistõttu on antud lühiülevaade Lorentzi-Poincaré sümmeetriast. See osutub vajalikuks ka Rarita-Schwingeri teooria kirjeldamisel. Siinne tutvustus põhineb õpikutel [13] ptk 5.6 või [14] ptk II.3 ja [15].

Huvipakkuv Lorentzi-Poincaré rühm on mittekompaktne lõpmatumõõtmeline Lie' rühm, tema elemendid sõltuvad pidevalt ja diferentseeruvalt 10 reaalsest parameetrist  $\theta^a$  (3 Lorentzi tõugete, 3 ruumi pöörete ja 4 aegruumi nihete parameetrit). Väljade klassifitseerimine toimub eelkõige Lorentzi rühma alusel, mille esitusi võib vaadata  $(j^-, j^+)$  klassifikatsioonis. Lorentzi rühma  $SO(3, 1)$  pöörete generaatorid  $J_i$  ja tõugete generaatorid  $K_i$  moodustavad algebra

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k. \quad (1.1.1)$$

Võib defineerida kombinatsioonid

$$J_i^\pm = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i), \quad (1.1.2)$$

nii et nad moodustavad eraldiseisvad  $SU(2)$  algebrad

$$[J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk} J_k^+, \quad [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk} J_k^-, \quad [J_i^+, J_j^-] = 0. \quad (1.1.3)$$

Rühma  $SU(2)$  esitusi võib eristada kaalude  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$  alusel, mis viibki  $(j^-, j^+)$  klassifikatsioonini, vahel nimetatakse ka  $SU(2) \otimes SU(2)$  dekompositsiooniks<sup>1</sup>. Esitusel  $(j^-, j^+)$  on komponendid, mis teisenevad kui objektid, mille spinn on

$$j = |j^- - j^+|, \dots, |j^- + j^+|. \quad (1.1.4)$$

Dimensioon on vastavalt  $(2j^- + 1)(2j^+ + 1)$ . Kõik väljad on konstrueeritavad homogeense Lorentzi rühma taandumatute esituste otsesummana, [13] ptk 5.6.

Diraci spiinorid teisenevad Lorentzi rühma esituses

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad (1.1.5)$$

<sup>1</sup>Täpsemalt öeldes on rühm  $SO(3, 1; \mathbb{C})$  lokaalselt isomorfne kui  $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ .

kus eristuvad (vastavalt vasaku- ja paremakäelised) Weyli spiinorid esitustes  $(\frac{1}{2}, 0)$  ja  $(0, \frac{1}{2})$ . Otsesumma moodustamine on oluline, kui nõuda sümmeetriat paarsusteisendustel, sest paarsusteisendustel  $(\frac{1}{2}, 0) \leftrightarrow (0, \frac{1}{2})$ . Bispiinori võib kirjutada ilmutatult Diraci esituses kui

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi_R(x) + \psi_L(x) \\ \psi_R(x) - \psi_L(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

Edasist teooria ülesehitamist vaadatakse lagranžiaani tiheduse (edaspidi lühidalt lagranžiaani) baasil, kuigi nt Diraci võrrandi võib tuletada, kui jätkata rühmateoreetiliste kaalutlustega (täpsemalt [14] ptk II.3 või [16] ptk 3.2), kasutada Diraci mõttekäiku [17] vms. Vaba Diraci teooria lagranžiaan on

$$\mathcal{L}_D^0 = c\bar{\psi}(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi. \quad (1.1.7)$$

See on Lorentzi-invariantne suurus. Olgu märgitud, et  $\gamma$ -maatriksid rahuldavad Diraci algebrat,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (1.1.8)$$

Diraci lagranžiaan sõltub väljadest  $\psi$  ja  $\bar{\psi}$  ning nende tuletistest  $\partial_\mu\psi$ ,  $\partial_\mu\bar{\psi}$ . Kõiki neid suursi loetakse Euleri-Lagrange'i võrrandite seisukohast sõltumatuteks, kuigi kehtib  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ . Lagranžiaan peab rahuldama Euleri-Lagrange'i võrrandeid

$$\frac{\partial\mathcal{L}_D^0}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_D^0}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}_D^0}{\partial\psi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_D^0}{\partial(\partial_\mu\psi)} = 0. \quad (1.1.9)$$

Neist järeldub Diraci võrrand

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0. \quad (1.1.10)$$

ja samaväärne kaasvõrrand

$$\bar{\psi}(-i\hbar\overleftarrow{\not{\partial}} - mc) = \bar{\psi}(i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} - mc) = 0. \quad (1.1.11)$$

Elektromagnetvälja võib sisse tuua analoogiliselt klassikalise elektrodünaamikaga minimaalse asenduse teel. Peale esimest kvantiseerimist on  $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ , mistõttu koos minimaalse asendusega

$$i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} \rightarrow i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} - q\gamma^\mu A_\mu. \quad (1.1.12)$$

Interakteeruv lagranžiaan on

$$\mathcal{L}_D = c\bar{\psi}(i\hbar\overrightarrow{\not{\partial}} - mc)\psi - cq\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (1.1.13)$$

Põhjalikumas teooria ülesehituses ja kvantiseerimisprotseduuris, näiteks [16] ptk 3, peale teooria põhisuuruste konstrueerimist postuleeritakse kausaalsuse säilitamiseks kvantiseerimisel

võrdse-aja antikommutatsiooniseosed (konstantide täpsuseni, vrd kommutatsiooniseosed rikuksid kausaalsust)

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ab}, \\ \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} &= \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0.\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

Siit järelduvad antikommutatsiooniseosed tekke- ja kaooperaatoritele, defineeritakse vaakum jne. Jõutakse samade põhitulemusteni, nagu on enne esitatud esimese kvantiseerimise kaudu. Minimaalne asendus on kvantväljateoorias põhjendatud lagranžiaani invariantisusega lokaalsete faasiteisenduste all, kui samaaegselt

$$\psi \rightarrow e^{iq\alpha}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \hbar\partial_\mu\alpha, \tag{1.1.15}$$

kus  $\alpha = \alpha(x)$ . Elektromagnetvälja kvantiseerimise võib teostada kanoonilise kvantiseerimise teel, mis sõltub kalibratsiooni fikseerimisest. Seda võib teha Coulomb'i kalibratsioonis  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , põhjalikumalt näiteks [18] ptk 14, või Lorentzi kalibratsioonis [19] ptk 5.

## 1.2 Feynmani reeglid

Eksperimentaalselt olulised on hajumiseksperimentid ja eksperimentid lagunemismäärade hindamiseks. Kvantväljateooria võimaldab mõjuristlõikeid ja lagunemismäärasid arvutada häiritusteooria meetoditega (interaktsioonihamiltoniaan  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  kui häiritus), huvipakkuvad teooriad ei ole täpselt lahenduvad. On mitu viisi jõuda kvantväljateoreetilise häiritusarvutuse, näiteks ületeeintegraalide formalismis<sup>2</sup> [21], kuid praegu piirdatakse Feynmani reeglite esitamisega üksnes postulatiivsel viisil.

Feynmani reeglid võib esitada korrelatsioonifunktsioonide või hajumismaatriksi elementide jaoks. Comptoni hajumise korral on eesmärk arvutada mõjuristlõige, mistõttu otsesem on anda reeglid  $S$ -maatriksi elementide jaoks. Jätkates [16] eeskujul, võib  $S$ -operaatori kirjutada ajalise arengu operaatori  $U(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t_f-t_i)}$  piirväärtusena

$$S_{fi} = {}_f\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_i = \lim_{\substack{t_i \rightarrow -\infty \\ t_f \rightarrow +\infty}} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | U(t_f, t_i) | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots | S | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle. \tag{1.2.1}$$

Niisuguses kirjelduses on hajumisolukorras algolekus kaks asümptootiliselt vaba lainepaketti, mille impulsid on kontsentreerunud väärtuste  $\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B$  ümber, ning vaadatakse tõenäosusamplituudi, et lõppolekus on lainepaketid impulssidega  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$

Eraldades  $S$ -maatriksi elementides deltafunktsiooniga seotud osa, saab siduda iga  $i\mathcal{M}$  avaldise liikme kindla Feynmani diagrammi elemendiga. Edasi saab anda eeskirja  $i\mathcal{M}$  avaldiste moodustamiseks. Comptoni hajumise jaoks huvipakkuvad elemendid moodustavad loetelu:

---

<sup>2</sup>Füüsika ajaloo huvides võib mainida kvantväljateooria formalismi arendamises Tomonagat, Schwingerit ja Feynmani, ülevaade nt raamatus [20].

1. propagaator

$$\longrightarrow = S_f(p) = \frac{i\hbar(\gamma^\mu p_\mu + mc)}{p^2 - m^2c^2};$$

2. verteks

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} = \frac{iq\gamma^\mu}{\hbar};$$

3. välised jooned

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} = u(p, s),$$

$$\text{---} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \bar{u}(p, s),$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow p \end{array} = \varepsilon_\mu(k, \lambda),$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow p \end{array} = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda).$$

Siin on  $q$  osakese laeng ja  $m$  tema mass. Juurde võiks lisada siseneva anti fermioni jaoks kordaja  $\bar{v}(p, s)$  ja väljuva jaoks  $v(p, s)$ , kuid anitosakesi tavalises Comptoni hajumises ei esine. Edasi võib nõuda analoogilist Feynmani reeglite kogumikku, mis on näiteks kirjeldatud õpikutes [16] ptk 4.7, [13] lk 281–265, 281–282 ja [22] ptk 20.2:

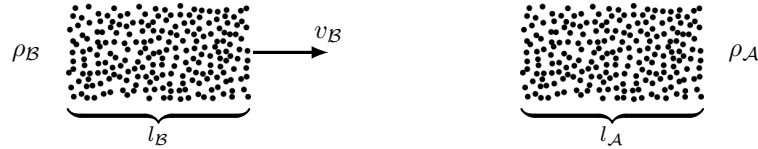
1. joonistatakse kõik sobivad Feynmani diagrammid vastava järguni (konkreetselt Comptoni hajumise korral on diagrammid teada);
2. diagrammide põhjal moodustatakse avaldised vastavalt eelkirjeldatud Feynmani diagrammide elemente lisades, verteksites nõuatakse impulsi jäävust;
3. integreeritakse üle sisemiste joonte 4-impulsside, summeeritakse üle väljaindeksite jne;
4. vajadusel leitakse avaldise märk vastavalt märkide reeglile, korrutatakse sümmeetria-teguriga jms;
5. liidetakse kõikide diagrammide poolt määratud üleminekuamplituudid summaarseks üleminekuamplituudiks.

Need on Feynmani reeglite üldpõhimõtted. Elementide järjestus  $i\mathcal{M}$  avaldise jaoks toimub fermionjoone vastassuunas.

Lagranžiaanipõhises analüüsis on Feynmani reeglite postuleerimine võrdlemisi lihtne. Kui on alg- või lõppolekutes oodata väljasid, lisatakse välja iseloomustav suurus (spiinor, vektor jne), verteksi võib lugeda välja lagranžiaani interaktsiooniliikmest, propagaatori võib leida vaba välja lagranžiaani spiinoritevahelise osa pööramisel. Feynmani diagrammide elemente saab ka füüsikaliselt tõlgendada, nt propagaator kirjeldab osakeste levikut aegruumi punktist punkti, verteksid kirjeldavad väljadevahelisi interaktsioone.

### 1.3 Mõjuristlõige

Hajumiseksperimentides suunatakse kaks kindlate impulssidega osakestekimpu üksteisega kokku; vaadeldav suurus on mõjuristlõige, mis iseloomustab konkreetset hajumisnähtust. Ilmekas definitsioon on antud õpikus [16] ptk 4.5, millele siinne esitus põhineb, ja analoogiliselt õpikus [13] ptk 3.4. Neis raamatutes on esitatud ka diferentsiaalse mõjuristlõike ja üleminekuamplituudi seosevalemi tuletuskäik ja nende analoogial on tutvustav joonis konstrueeritud.



Joonis 1.1: Mõjuristlõike definitsiooniskeem

Olgu sihtmärgiks paigalseisvad  $\mathcal{A}$ -tüüpi osakesed numbertihedusega  $\rho_A$  ning kimbu pikkusega  $l_A$ , langegu neile  $\mathcal{B}$ -tüüpi osakesed numbertihedusega  $\rho_B$ , kimbu pikkusega  $l_B$  ja kiirusega  $v_B$ , olgu kimpudel ühine ristlõikepindala  $S$ . Üldjuhul ei ole tegu konstantsete suurustega. Sellist definitsiooniskeemi on kujutatud joonisel 1.1. Sel juhul võib hajumisnähtuse täismõjuristlõike (mitterangelt) defineerida kui

$$\sigma \equiv \frac{\text{Hajumissündmuste arv}}{\rho_A l_A \rho_B l_B S}, \quad (1.3.1)$$

mistõttu homogeensuse eeldusel osakeste koguarvu  $N_A$  ja  $N_B$  jaoks kehtib

$$\frac{\text{Hajumissündmuste arv}}{N_A} = \frac{N_B \sigma}{A}, \quad (1.3.2)$$

mille tõlgendamine suhtelise sagedusena on lihtsam. Sümmeetria  $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$  tõttu on lubatud käsitleda ka mõnd teist taustsüsteemi. Diferentsiaalse mõjuristlõike võib täpsemini defineerida kui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{n}{j}, \quad (1.3.3)$$

kus  $n$  on ruuminurka  $\Omega$  hajunud osakeste arv ajaühiku ja ruuminurgaühiku kohta,  $j = \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial A} = \frac{\partial v}{\partial V}$  on osakeste sisendvoog aja- ja pindalaühiku kohta (uuritavas ruumipunktis). Mõjuristlõikel on pindala ühikud, teda võib tõlgendada interaktsiooni mõju (tõenäosusliku) ulatusena. Täismõjuristlõige ennustab hajumissündmuste kogusagedust. Rohkem teavet on diferentsiaalses mõjuristlõikes, mis annab mõjuristlõike sõltuvuse mingist parameetrist, üldjuhul osakeste impulssidest või hajumisnurgast (ruuminurgast).

On võimalik näidata, et diferentsiaalne mõjuristlõige avaldub kui

$$d\sigma = \frac{c\hbar^4}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} \frac{1}{4} |\mathcal{M}|^2 dPS, \quad (1.3.4)$$

kus  $|\mathcal{M}|^2$  on summaarse üleminekuamplituudi mooduli ruut ja  $dPS$  on diferentsiaalne Lorentzi-invariantse faasiruumi element. Tulemus (1.3.4) seob teoorias arvutatud suuruse (üleminekuamplituudi) katses vaadeldava suurusega (mõjuristlõikega). Kordaja  $\frac{1}{4}$  on seotud spinn-keskmistamisega.

Aineosakesed kannavad endaga ka spinni, kuid tavalises Comptoni hajumises ei ole spinn oluline. Sama moodi pole oluline footonite polarisatsioon, mistõttu mõlemad suurused keskmistatakse välja. Kehtib täielikkuse tingimus

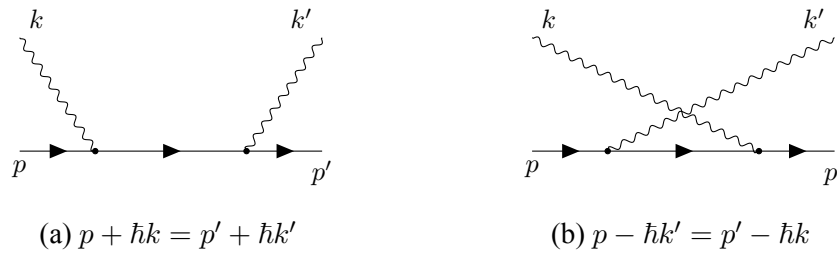
$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + mc, \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - mc. \quad (1.3.5)$$

Nende valemite tuletuskäik toimub ilmutatud teel, kui vaadata Diraci võrrandi lahendit, mis on tõukega viidud suvalisse taustsüsteemi. Footoni polarisatsioonide üle summeerimiseks ja keskmistamiseks võib kasutada valemit (Feynmani kalibratsioonis)

$$\sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu(k, \lambda) \varepsilon_\nu^*(k, \lambda) = -\frac{g_{\mu\nu}}{\varepsilon_0 c}. \quad (1.3.6)$$

## 1.4 Feynmani diagrammid ja üleminekuamplituudid

Comptoni hajumise elementaarses kvantväljateoreetilises käsitluses ilmnevad puu tasemel kaks diagrammi, mis on esitatud joonisel 1.2. Neid diagramme on võimalik füüsikaliselt interpreteerida: 1.2a vastab protsessile, kus osake neelab footoni ning seejärel kiirgab teise footoni, ning 1.2b vastab olukorrale, kus elektron kiirgab footoni enne, kui ta neelab footoni; määramatusseoste piires on selline energia jäävuse rikkumine lubatud.



Joonis 1.2: Comptoni hajumise Feynmani diagrammid spinn- $\frac{1}{2}$  teoorias.

Võib kirjutada välja üleminekuamplituudid koos kaaskompleksidega kummagi protsessi jaoks:

$$i\mathcal{M}_1 = -\frac{iq^2}{\hbar[(p + \hbar k)^2 - m^2 c^2]} \bar{u}(p', s') \gamma^\mu (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \gamma^\nu u(p, s) \varepsilon_\nu(k, \lambda) \varepsilon_\mu^*(k', \lambda'), \quad (1.4.1a)$$

$$i\mathcal{M}_1^* = -\frac{iq^2}{\hbar[(p + \hbar k)^2 - m^2 c^2]} \bar{u}(p, s) \gamma^\nu (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \gamma^\mu u(p', s') \varepsilon_\nu^*(k, \lambda) \varepsilon_\mu(k', \lambda'), \quad (1.4.1b)$$

$$i\mathcal{M}_2 = -\frac{iq^2}{\hbar[(p - \hbar k')^2 - m^2 c^2]} \bar{u}(p', s') \gamma^\mu (\not{p} - \hbar \not{k}' + mc) \gamma^\nu u(p, s) \varepsilon_\nu^*(k', \lambda') \varepsilon_\mu(k, \lambda), \quad (1.4.1c)$$

$$i\mathcal{M}_2^* = -\frac{iq^2}{\hbar[(p - \hbar k')^2 - m^2c^2]} \bar{u}(p, s) \gamma^\nu (\not{p} - \hbar \not{k}' + mc) \gamma^\mu u(p', s') \varepsilon_\nu(k', \lambda') \varepsilon_\mu^*(k, \lambda). \quad (1.4.1d)$$

Maatrikselementide kaaskompleksid võib kirjutada otse välja diagrammide põhjal, kui elemendid panna kirja “tagurpidi”. Samas on nende kuju põhjendatud, kui algset maatrikselementi adjungeerida.

Summaarne keskmistatud üleminekuamplituud on

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \overline{(\mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2^*)(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)} = \overline{|\mathcal{M}_1|^2} + \overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} + \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1} + \overline{|\mathcal{M}_2|^2}. \quad (1.4.2)$$

Siin on kokku neli arvutust, kuid on võimalik näidata, et  $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$  on  $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$  põhjal kirja pandav ning  $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1}$ .

Esimesena võib arvutada mooduli ruudu  $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$ . Olgu märgitud, et üleminekuamplituudid on maatrikskorrutiste struktuuriga,  $\mathcal{M}_1^* = \bar{u}_i(p, s) A_{ij}(p + \hbar k) u_j(p', s')$  ja  $\mathcal{M}_1 = \bar{u}_k(p', s') B_{kl}(p + \hbar k) u_l(p, s)$ . Näidates ilmutatult maatriksorrutise indeksit, on võimalik keskmistamisel vahetada liikmete järjekorda ja viia avaldis maatriksi jälje kujule, mida tuntakse Diraci jälje meetodi all. Keskmistatud mooduli ruut on

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \sum_{\lambda, \lambda'} A_{ij}(p + \hbar k) \left[ \sum_s u_j(p, s) \bar{u}_k(p, s) \right] B_{kl}(p + \hbar k) \left[ \sum_{s'} u_l(p', s') \bar{u}_i(p', s') \right] = \\ &= \frac{4\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k)^2} \text{Tr} [(\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \gamma_\mu (\not{p} + mc) \gamma^\mu (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \gamma_\nu (\not{p}' + mc) \gamma^\nu]. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

On tähistatud  $\alpha_q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$  ja lihtsustatud konstanti

$$\frac{q^4}{\varepsilon_0^2 \hbar^2 c^2 [(p + \hbar k)^2 - m^2 c^2]^2} = \frac{4\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k)^2}. \quad (1.4.4)$$

Eirerelatiivsusteooriast on tuntud valemid

$$p \cdot p = m^2 c^2, \quad p' \cdot p' = m^2 c^2, \quad (1.4.5a)$$

$$k \cdot k = 0, \quad k' \cdot k' = 0. \quad (1.4.5b)$$

Veel on kasutada protsessi 4-impulsi jäävus,

$$p + \hbar k = p' + \hbar k' \Leftrightarrow p - \hbar k' = p' - \hbar k \Leftrightarrow \hbar(k - k') = p' - p, \quad (1.4.6)$$

millest järeldub

$$p \cdot k = p' \cdot k', \quad p \cdot k' = p' \cdot k, \quad \hbar^2 k' \cdot k = p' \cdot p - m^2 c^2. \quad (1.4.7)$$

Asendades 4-impulsi jäävusest avaldatud suurused, saab vahetada skalaarkorrutised lainevektorite endi või impulsside endi vahel skalaarkorrutistega lainevektorite ja impulsside vahel:

$$\hbar k' \cdot k = (p + \hbar k - p') \cdot k = p \cdot k - p' \cdot k, \quad (1.4.8a)$$

$$p' \cdot p = (p + \hbar k - \hbar k') \cdot p = m^2 c^2 + \hbar p \cdot k - \hbar p \cdot k'. \quad (1.4.8b)$$



Nüüd on olemas kõik seosed, et arvutada ja lihtsustada jälgesid. Need arvutused on esitatud lisan C. Esimese üleminekuamplituudi mooduli ruut on

$$|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = \frac{64\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)^2} [4m^4c^4 - 2m^2c^2p \cdot p' + 4m^2c^2\hbar p \cdot k - 2m^2c^2\hbar p' \cdot k + 2\hbar^2(p \cdot k)(p' \cdot k)]. \quad (1.4.9)$$

Üleminetõenäosus  $|\overline{\mathcal{M}}_2|^2$  on vahetult esimese tulemuse põhjal kirjutatav. Asendades  $\mathcal{M}_1$  avaldises  $k \rightarrow -k'$ , moodustub  $\mathcal{M}_2$  avaldis. Seega võib kirjutada

$$|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = \frac{64\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k')^2} [4m^4c^4 - 2m^2c^2p \cdot p' - 4m^2c^2\hbar p \cdot k' + 2m^2c^2\hbar p' \cdot k' + 2\hbar^2(p \cdot k')(p' \cdot k')]. \quad (1.4.10)$$

Järgmisena võib põhjendada, et  $\overline{\mathcal{M}}_1^*\mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}}_2^*\mathcal{M}_1$ . Esmalt

$$\overline{\mathcal{M}}_1^*\mathcal{M}_2 = -\frac{4\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)(p \cdot k')} \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \hbar\not{k} + mc)\gamma^\nu(\not{p}' + mc)\gamma_\mu(\not{p} - \hbar\not{k}' + mc)\gamma_\nu(\not{p} + mc)]. \quad (1.4.11)$$

Gammamaatriksite järjekorda on lubatud jäljes pöörata,

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\ldots) = \text{Tr}(\ldots\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu). \quad (1.4.12)$$

Kasutades ära jälje tsüklilisuse omadust  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$ , järeldub otseselt, et  $\overline{\mathcal{M}}_2^*\mathcal{M}_1$  jälg on teisendatav  $\overline{\mathcal{M}}_1^*\mathcal{M}_2$  jäljeks, mistõttu tõepoolest  $\overline{\mathcal{M}}_1^*\mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}}_2^*\mathcal{M}_1$ . Lõpptulemus on

$$\overline{\mathcal{M}}_1^*\mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}}_2^*\mathcal{M}_1 = \frac{64\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)(p \cdot k')} (-2m^4c^4 + m^2c^2\hbar p \cdot k' - m^2c^2\hbar p \cdot k). \quad (1.4.13)$$

Neliimpulsi jäävuse tõttu on sõltumatuid suurusi ainult 3, mistõttu võib üle minna  $p, p', k, k' \rightarrow p, k, k'$  ning seega kokkuvõetuna on summaarse keskmistatud üleminekuamplituudi mooduli ruut

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{128\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2} \left[ \hbar^2 \left( \frac{p \cdot k'}{p \cdot k} + \frac{p \cdot k}{p \cdot k'} \right) + 2m^2c^2\hbar \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right) + m^4c^4 \left( \frac{1}{p \cdot k} - \frac{1}{p \cdot k'} \right)^2 \right]. \quad (1.4.14)$$

Seda valemit on võimalik teisendada, kui on fikseeritud taustsüsteem, kus hajumist vaadatakse. Comptoni hajumise korral on selleks tavaliselt laboratooriumi taustsüsteem, kus osake on algselt paigal ja talle langeb kiirgus, s.o  $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$  ja  $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ ,  $k'^\mu = (\omega'/c, \mathbf{k}')$ , mistõttu  $p \cdot k = m\omega$  ja  $p \cdot k' = m\omega'$ . Sel juhul

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{128\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2} \left[ \hbar^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right) + 2mc^2\hbar \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + m^2c^4 \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2 \right]. \quad (1.4.15)$$

Suurused  $\omega$  ja  $\omega'$  ei ole täiesti sõltumatud, vaid nad on seotud Comptoni valemi abil,

$$\omega' = \frac{\omega mc^2}{mc^2 + \omega\hbar(1 - \cos\theta)}. \quad (1.4.16)$$

Üleminekuamplituudile on võimalik anda kuju, mis sõltub ainult ringsageduste suhtest:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 128\pi^2\alpha_q^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2\theta \right]. \quad (1.4.17)$$

Paratamatult jääb sisse sõltuvus kahest muutujast, kas hajumisnurgast, algsagedusest või lõppsagedusest, mistõttu üleminekuamplituudi võib käsitleda kahe muutuja funktsioonina.

## 1.5 Lorentzi-invariantne faasiruum

Lorentzi-invariantne faasiruum toodi sisse mõjuristlõike arvutamiseks valemis (1.3.4). Lõppseisundis kahe osakesega juhu jaoks avaldub faasiruum kujul

$$dPS_2 = \left( \prod_{f=1}^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{p}_f)} \right) (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f), \quad (1.5.1)$$

mis on näiteks toodud õpikus [16] lk 106. Siin on  $p_A = (\hbar|\mathbf{k}|, \hbar\mathbf{k})$  footoni algimpulss,  $p_B = (mc, \mathbf{0})$  on osakese algimpulss tema enda taustsüsteemis,  $p_1 = \hbar k'$  on footoni lõppimpulss ja  $p_2 = p'$  on osakese lõppimpulss. Lahti kirjutatuna on

$$dPS_2 = \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{k}')} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{p}')} (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p + \hbar k - p' - \hbar k'). \quad (1.5.2)$$

Integreerimisel üle mingite, aga mitte kõigi, suuruste, saab diferentsiaalse mõjuristlõike, et integreeritud suurused võtavad mistahes väärtuseid, aga kõik ülejäänud suurused omandavad huvipakkuvaid väärtusi. S.o integreerimisel üle elektroni lõppimpulsi  $p'$  enam ei vaadelda lõppimpulssi täpselt. Sel teel saab tuletada valemi, mis seob etteantud suurused  $p, k, k'$  omavahel ja hajumise suunaga.

Integreerimine on esitatud lisas D. Siin on antud huvipakkuvate jaotuste lõpptulemused:

$$\frac{d\sigma}{d\hbar|\mathbf{k}'|} = \frac{c}{32\pi m\omega^2} \frac{1}{4} |\overline{\mathcal{M}}|^2, \quad (1.5.3a)$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{\hbar^2}{32\pi c^2 m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{1}{4} |\overline{\mathcal{M}}|^2, \quad (1.5.3b)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2}{64\pi^2 c^2 m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{1}{4} |\overline{\mathcal{M}}|^2. \quad (1.5.3c)$$

Üleminekuamplituudid on eelnevalt arvutatud. Nüüd on leitud valemid, mille abil saab arvutada vaadeldavaid suursi, mida saab eksperimentaalselt kontrollida.

On oluline rõhutada, et Lorentzi-invariantne faasiruumielement on ainult kinemaatiline suurus. Faasiruumielemendi tuletamisel ei teha eeldusi lainefunktsioonide sisemise struktuuri kohta, antud juhul kas tegu on spiinorite või vektorspiinoritega. Seega Rarita-Schwingeri teooria kirjelduses jääb faasiruumielement samaks ning valemid jäävad (1.5.3) kehtima. Diraci ja Rarita-Schwingeri teooriad erinevad üksnes üleminekuamplituudide poolest, mistõttu just see iseloomustabki erineva spinniga osakeste erisusi. Reaalselt vaadeldavate suuruste hulgast on aga kõige enam huvipakkuv mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga.

## 2. Comptoni hajumine Rarita-Schwingeri teoorias

Rarita-Schwingeri teooria [23] on üks viis elementaarsete spinn- $(n + \frac{1}{2})$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  osakeste kirjeldamiseks. Kõrgema spinni teooriaid on ka teisi, nt juba Fierz ja Pauli [24] esitasid ühe esimestest kõrgema spinni teooria formuleeringutest, ning kõrgema spinni teooriaid on võimalik formuleerida mitmel viisil, ülevaade nt [25]. Siiski on RS formalism üks lihtsamatest ning on ka alus täiustatud teooriatele, mis püüavad kõrvaldada RS teooria vastuolusid. Seetõttu on tavalise Rarita-Schwingeri teooria uurimine samuti huvipakkuv. Paljud avaldised ja tuletuskäigud osutuvad väga pikaks, mistõttu nad on esitatud lisas E.

### 2.1 Rarita-Schwingeri formalism

W. Rarita ja J. Schwinger esitasid üldised kõrgema poolarvulise spinniga teooria põhi-võrrandid (vabal juhul)

$$(i\hbar\partial - mc)\Psi_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad \gamma^\rho\Psi_{\rho\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad (2.1.1)$$

millest järelduvad lisatingimused

$$\partial^\rho\Psi_{\rho\mu_2\dots\mu_n} = 0, \quad \Psi^\rho_{\rho\mu_3\dots\mu_n} = 0. \quad (2.1.2)$$

Teooria põhisuurused on nn tensorspiinorid, s.o sümmeetrilised  $n$ -järku tensorid, mille komponendid on spiinorid. Kontrollimiseks, et teoorias on õige spinn, pakkusid Rarita ja Schwinger välja sõltumatute tasalaineliste lahendite koguarvu  $2(n + \frac{1}{2}) + 1$  leidmise või sisemise impulsi-momendi ruudu  $(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})$  otsese arvutamise osakese taustsüsteemis.

Rarita-Schwingeri teooriani on võimalik jõuda mitmel erineval viisidel. Näiteks [26] ja [27] ptk 15.6 konstrueerivad Rarita-Schwingeri põhivõrrandid Bargmann-Wigneri multispiinoritest ja võrranditest. Rühmateoreetilise meetodi korral (nt [13] ptk 5.6 või [28]), s.o kui moodustada teooria põhisuurused Lorentzi rühma taandumatutest esitustest, saab spinn- $\frac{3}{2}$  teooria vektor-spiinorväljad moodustada otsekorruisena 4-vektoresitusest ja Diraci spiinoresitusest,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \oplus \left(1, \frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (2.1.3)$$

Jätkates otsekorrutise moodustamist 4-vektoresitusega (mis käitub ruumi pööretel kui otsesumma spinn-1 kolmvektorist ja spinn-0 skalaarist), võib jõuda mistahes soovitud spinnini. On aga näha, et spinn- $\frac{3}{2}$  sektori kõrval on ka spinn- $\frac{1}{2}$  sektor  $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$  ning spinn- $\frac{1}{2}$  sisaldub ka esitustes  $(\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2})$  koos spinniga- $\frac{3}{2}$ . Spinni  $\frac{1}{2}$  kõrvaldamiseks antaksegi vektorspiinoritele lisatingimus  $\gamma^\rho \Psi_\rho = 0$ ; spinni komponentide kahekordistumise kõrvaldavad Diraci võrrandid ja viimase spinn- $\frac{1}{2}$  komponendi eemaldab massipinnal tingimus  $\partial^\rho \Psi_\rho = 0$ , nagu ütleb [13] ptk 5.6.

Seega võib spinn- $\frac{3}{2}$  teooria põhisuurustele, vektorspiinoritele  $\Psi_\mu$ , seada võrrandid

$$(i\hbar\partial - mc)\Psi_\mu = 0, \quad \gamma^\rho \Psi_\rho = 0, \quad (2.1.4)$$

millest peale Diraci võrrandi  $(i\hbar\partial - mc)\Psi_\mu = 0$  ahendamist gammamaatriksitega järeldub massipinnal

$$\partial^\rho \Psi_\rho = 0. \quad (2.1.5)$$

Edaspidi on käsitletud üksnes spinn- $\frac{3}{2}$  teooriat lagranžiaanipõhiselt. Põhjalik RS spinn- $\frac{3}{2}$  teooria konstrueerimis- ja kvantiseerimiskäik on antud doktoritöös [26], siin antakse tulemused pigem postulatiivselt.

Vektorspiinorid on kokku pandavad 16-komponendiliseks spiinoriks

$$\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \Psi^0 \\ \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Kokku 16 komponendist 8 vastavad koguspinnile  $\frac{3}{2}$ , millest 4 on positiivse energiaga ja 4 negatiivse energiaga olekud, ja 8 vastavad koguspinnile  $\frac{1}{2}$ ; seega 8 komponenti on üleliigsed. Kui vaadata üksnes positiivse energiaga olekuid  $U^\mu$  osakese enda taustsüsteemis (kus pööretel  $U^\mu$  ja negatiivse energia olekud  $V^\mu$  ei segune)  $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ ,  $\gamma_0 U^\mu = U^\mu$ , nt Nykerki [26] järgi, siis komponentidel  $U^0$  ja  $\gamma \cdot \mathbf{U}$  on spinnile  $\frac{1}{2}$  omased teisenemisomadused ning nad kõrvaldatakse tingimustega  $U^0 = 0$ ,  $\gamma \cdot \mathbf{U} = 0$ , mis on aga omakorda järeldused tingimustest  $\gamma^\rho \Psi_\rho = 0$  ja  $\partial^\rho \Psi_\rho = 0$  paigaloleku süsteemis. Nii jääb alles üksnes spinn- $\frac{3}{2}$  osa.

Nagu järeldub avaldisest (2.1.3), ei ole RS teooria spinn- $\frac{3}{2}$  esituse moodustamine täiesti puhas, vaid seotud üleliigsete spinn- $\frac{1}{2}$  komponentidega. Vaatamata spinn- $\frac{1}{2}$  osa kõrvaldamisele, seostatakse spinn- $\frac{1}{2}$  sektorit Rarita-Schwingeri teooria vastuolude allikaga. Käesolevas peatükis on jäetud potentsiaalsed probleemid kõrvale ning arvutatud RS teooria tulemused neist sõltumatuna, mis annab teavet teooria üldise olemuse ja ka sisemiste vastuolude olulisuse kohta.

## 2.2 Spinn- $\frac{3}{2}$ väli

Kuigi tegu ei ole kõige üldisemast klassist lagranžiaaniga (näiteks [29] on pakkunud 4 parameetriga lagranžiaani, kus 2 on renormeerimisega kõrvaldatavad), on kirjanduses enamlevinud Rarita-Schwingeri vaba välja lagranžiaani tihedus antud ühe tundmatu konstandiga:

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\Psi}^\mu[(i\hbar\partial - mc)g_{\mu\nu} + A(i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + i\hbar\gamma_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + (3A^2 + 3A + 1)mc\gamma_\mu\gamma_\nu]\Psi^\nu, \quad (2.2.1)$$

kus  $A \neq -\frac{1}{2}$ , aga on muus osas suvaline konstant. Vahel defineeritakse lühiduse huvides

$$B = \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1), \quad C = 3A^2 + 3A + 1. \quad (2.2.2)$$

Võivad olla mõned erinevused sõltuvalt allikast, näiteks mõnikord tuuakse  $B$  juurest  $\frac{1}{2}$  välja. Tingimus  $A$  jaoks tuleneb propagaatori avaldisest, kuid muid põhimõttelisi kitsendusi ei ole.

Rarita-Schwingeri lagranžiaani tihedus (2.2.1) on invariantne teatud nn punktteisenduste korral,

$$\begin{aligned} \Psi_\mu &\rightarrow \Psi'_\mu = \Psi_\mu + a\gamma_\mu\gamma_\rho\Psi^\rho = R_{\mu\rho}(a)\Psi^\rho, \\ A &\rightarrow A' = \frac{A - 2a}{1 + 4a}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

kus  $a \neq -\frac{1}{4}$  on suvaline konstant ja

$$R_{\mu\nu}(a) = g_{\mu\nu} + a\gamma_\mu\gamma_\nu. \quad (2.2.4)$$

Konstanti  $A$  võib tõlgendada kui tegurit, mis määrab kui palju on spinn- $\frac{1}{2}$  komponent  $\gamma^\rho\psi_\rho$  on segunenud ülejäänud väljadega ning invariantsusest tuleneb teooria füüsikalise olemuse sõltumatus konstandi väärtusest [30]. Rangem käsitus on võimalik Kamefuchi *et al.* [31] ekvivalentsusteoreemi abil, mis ([30] kirjelduse järgi) ütleb, et teooria füüsikaline sisu ei muutu, kui peale punktteisendust saab teisenenud välja esitada astmereana esialgse välja muutujatest ja vastupidi.

Lagranžiaani sümmeetria nende punktteisenduste suhtes lubab valida  $A$  jaoks sellise väärtuse, mis lihtsustab edasisi arvutusi. Invariantsuse küsimus on oluline, mistõttu selle väite ilmutatud kontroll on läbi tehtud [32] alusel lisas E.1. Minimaalse asenduse seisukohast on oluline märkida, et faktoriseeringus (E.1.3) impulss kommuteerub ümbritsevate elementidega. Kamefuchi *et al.* ekvivalentsusteoreemi abil võib punktteisenduste sümmeetria tõttu öelda, et konstant  $A$  ei avalda füüsikalist mõju ja ei ole teoorias vaba parameeter ega täpse väärtuse poolest oluline.

Rarita-Schwingeri algartikli kokkulepe oli  $A = -\frac{1}{3}$ , kuid see ei osutu kõige lihtsamaks. Propagaatori kuju lihtsustub oluliselt, kui nõuda  $A = -1$ , misjuhul lagranžiaan on

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\Psi}^\mu[(i\hbar\partial - mc)g_{\mu\nu} - (i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + i\hbar\gamma_\nu\partial_\mu) + \gamma_\mu(i\hbar\partial + mc)\gamma_\nu]\Psi^\nu. \quad (2.2.5)$$

Edaspidi on RS lagranžiaani all peetud silmas eelkõige seda valemit. Konstandi väärtus on juba ette ennustatav, kui nõuda algses lagranžiaanis  $\frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1) = 3A^2 + 3A + 1$ . See tingimus jätabki valikusse kas Rarita-Schwingeri algartikli kokkuleppe  $A = -\frac{1}{3}$  või kokkuleppe  $A = -1$ . On kasulik ka defineerida vaba välja lagranžiaani tensor

$$(\Lambda_0)_{\mu\nu} = c[(i\hbar\partial - mc)g_{\mu\nu} + A(i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + i\hbar\gamma_\nu\partial_\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + (3A^2 + 3A + 1)mc\gamma_\mu\gamma_\nu]. \quad (2.2.6)$$

Sel juhul saab kirjutada lagranžiaani tiheduse lühidalt,

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}^\mu(\Lambda_0)_{\mu\nu}\Psi^\nu. \quad (2.2.7)$$

Vaba välja lagranžiaani tensor osutub vajalikuks propagaatori arvutamisel.

## 2.3 Elektromagnetinteraktsioon spinn- $\frac{3}{2}$ välja jaoks

Rarita-Schwingeri välja jaoks saab tuua elektromagnetinteraktsiooni sisse samal viisil nagu Diraci spiinorvälja jaoks, nimelt minimaalse asendusega. Endiselt peale esimest kvantiseerimist  $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ , seega minimaalse asendusega koos  $i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - qA_\mu = \pi_\mu$ . Kui viia läbi see operatsioon lagranžiaaniga (2.2.1), siis peale vaba välja lagranžiaani ja interaktsiooni liikme eraldamist on tulemuseks

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & c\bar{\Psi}^\mu[(i\hbar\partial - mc)g_{\mu\nu} + A(i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + i\hbar\gamma_\nu\partial_\mu) + \gamma_\mu(\frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)i\hbar\partial + \\ & + (3A^2 + 3A + 1)mc)\gamma_\nu]\Psi^\nu - \\ & - cq\bar{\Psi}^\mu[\gamma^\rho A_\rho g_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu A_\nu + \gamma_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma_\mu\gamma^\rho A_\rho\gamma_\nu]\Psi^\nu \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

ja nõudes  $A = -1$  on see

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & c\bar{\Psi}^\mu[(i\hbar\partial - mc)g_{\mu\nu} - (i\hbar\gamma_\mu\partial_\nu + i\hbar\gamma_\nu\partial_\mu) + \gamma_\mu(i\hbar\partial + mc)\gamma_\nu]\Psi^\nu - \\ & - cq\bar{\Psi}^\mu[\gamma^\rho A_\rho g_{\mu\nu} - (\gamma_\mu A_\nu + \gamma_\nu A_\mu) + \gamma_\mu\gamma^\rho A_\rho\gamma_\nu]\Psi^\nu. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Edaspidi on interakteeruva lagranžiaani all silmas peetud eelkõige lihtsustatud lagranžiaani (2.3.2). Impulsi ruumis võib lihtsalt asendada  $i\hbar\partial_\mu = p_\mu$ .

On tähtis kontrollida, kas punktteisenduste (2.2.3) sümmeetria säilib interakteeruv lagranžiaanis. See on tõepoolest nii, interakteeruv lagranžiaan on invariantne samade punktteisenduste suhteski, mis vaba lagranžiaangi. Kehtib täpselt sama põhjenduskäik, mis lisas E.1. Minimaalse asenduse järel  $p_\mu \rightarrow \pi_\mu$ , aga  $\pi_\mu$  on põhimõtteliselt samade (kommuteerumis)omadustega, mis algne impulss  $p_\mu$ ; võib viia läbi minimaalse asenduse faktoriseeritud lagranžiaanis (E.1.3) ning see ei sega ülejäänud liikmete kuju. [33] eksib oma väites, et sümmeetria on rikutud. Sümmeetria säilimine lubab öelda, et interakteeruva teooria füüsikaline sisu ja S-maatriksi elemendid ei sõltu konstandist  $A$ , mistõttu lihtsustus  $A = -1$  on täiesti põhjendatud.

### 2.3.1 Propagaator

Rarita-Schwingeri propagaatori tensor  $G_{\mu\nu} \sim (\Lambda_0)_{\mu\nu}^{-1}$  ehk samaväärsena tuleb lahendada võrrand

$$(\Lambda_0)_{\mu\rho} G^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (2.3.3)$$

Propagaatori avaldis on Rarita-Schwingeri välja jaoks teada (nt [34] ja sealsed viited), kuigi spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste jaoks on pakutud ka teisi variante (nt [35, 36], kriitika nt [37]). Üldkujulise lagranžiaani (2.2.1) jaoks on propagaatori tensori avaldis impulsiruumis

$$G^{\mu\nu} = \frac{i\hbar(\not{p} + mc)}{p^2 - m^2c^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\mu p^\nu \right] - \frac{i\hbar}{3m^2c^2} \frac{A+1}{2A+1} \left[ \gamma^\mu p^\nu + \frac{A}{2A+1}\gamma^\mu p^\nu + \left( \frac{1}{2} \frac{A+1}{2A+1} \not{p} - \frac{Amc}{2A+1} \right) \gamma^\mu\gamma^\nu \right]. \quad (2.3.4)$$

Otsekohe on näha põhjus, miks on antud nõue  $A = -\frac{1}{2}$ , sest vastasel juhul ei oleks propagaatori avaldis määratud, ja samuti miks nõue  $A = -1$  lihtsustab arvutusi olulisel määral.

Kirjanduses antakse üldjuhul üksnes üldine idee propagaatori tensori avaldise määramiseks, nimelt esitatakse (2.3.3). Käesolevas peatükis esitatud meetod propagaatori arvutamiseks põhineb osaliselt artiklil [34] (analoogilist skeemi on kirjeldatud nt doktoritöös [26]) ning on tuntud RS lagranžiaani jaoks üldkujuline. Üks variant on arendada propagaator erinevate gammamaatriksite ja impulsside kombinatsioonide abil ning moodustada võrrandisüsteem tundmatute konstantide määramiseks. Lorentzi kontravariantsuse nõudel peab üldine tensor olema moodustatud liikmetest (gammamaatriksite baasis)

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu, \quad p^\mu p^\nu, \quad \gamma^\mu p^\nu, \quad \gamma^\nu p^\mu, \\ \not{p}g^{\mu\nu}, \quad \not{p}\gamma^\mu\gamma^\nu, \quad \not{p}p^\mu p^\nu, \quad \not{p}\gamma^\mu p^\nu, \quad \not{p}\gamma^\nu p^\mu. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Gammamaatriksite baas ei pruugi olla lihtsaim, sest nende elementide kombinatsioonid ei ole omavahel täiesti sõltumatud. Antud juhul on kasutatud spinni projektsioonioperaatorite baasi, nagu see on antud töödes [26, 37]:

$$\begin{aligned} (P^{3/2})^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3p^2}(\not{p}\gamma^\mu p^\nu + p^\mu \gamma^\nu \not{p}), \\ (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} &= \frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{1}{3p^2}(\not{p}\gamma^\mu p^\nu + p^\mu \gamma^\nu \not{p}), & (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} &= \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}, \\ (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(p^\mu p^\nu - \not{p}p^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(p^\nu \gamma^\mu \not{p} - p^\mu p^\nu), \\ (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(\not{p}p^\mu \gamma^\nu - p^\mu p^\nu) = \frac{1}{\sqrt{3}p^2}(p^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu \not{p}). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Spinni projektoritele on võimalik anda lihtsad seletused, näiteks [38] järgi:  $(P^{3/2})^{\mu\nu}$  projitseerib põiki spinn- $\frac{3}{2}$  alamruumi,  $(P_{11}^{1/2})^{\mu\nu}$  põiki ja  $(P_{22}^{1/2})^{\mu\nu}$  piki spinn- $\frac{1}{2}$  alamruumi,  $(P_{12}^{1/2})^{\mu\nu}$  ja  $(P_{21}^{1/2})^{\mu\nu}$  viivad piki spinn- $\frac{1}{2}$  alamruumist põiki alamruumi ja vastupidi.

Spinni projektsioonioperaatorite jaoks kehtivad omadused

$$(P_{ij}^I)_{\mu\rho}(P_{kl}^J)^{\rho\nu} = \delta^{IJ}\delta_{jk}(P_{il}^J)_{\mu}^{\nu}, \quad (2.3.7a)$$

$$(P^{3/2})_{\mu\nu} + (P_{11}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (2.3.7b)$$

$$\not{p}P_{ij}^{1/2} = \pm P_{ij}^{1/2}\not{p}, \quad \begin{array}{l} i = j : + \\ i \neq j : - \end{array} \quad (2.3.7c)$$

$$\not{p}P^{3/2} = P^{3/2}\not{p}.$$

Projektsioonioperaatorite baas eristab spinn- $\frac{1}{2}$  ja spinn- $\frac{3}{2}$  osa, kuid spinn- $\frac{1}{2}$  liikmed ei ole omavahel ortogonaalsed. Siiski on korrutamismeetodid teatud määral lihtsamad, mistõttu antud tuleuskäigus kasutatakse just seda baasi. Kaloshini ja Lomovi [34] poolt pakutud ortogonaalne baas on veel paremate ortogonaalsusomadustega, aga osutub antud ülesandes üleliigseks. Üldkujulise propagaatori avaldise tuleuskäik on antud lisas E.2.

Arvutusteks võib kasutada lihtsustatud propagaatorit juhu  $A = -1$  jaoks,

$$G^{\mu\nu} = \frac{i\hbar(\not{p} + mc)}{p^2 - m^2c^2} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\mu p^\nu \right]. \quad (2.3.8)$$

## 2.3.2 Verteks

Interaktsioonis ilmnev verteks on otse välja loetav lagranžiaani tihedusest, nimelt liikmest

$$-cq\bar{\Psi}^\mu[\gamma^\rho A_\rho g_{\mu\nu} - (\gamma_\mu A_\nu + \gamma_\nu A_\mu) + \gamma_\mu\gamma^\rho A_\rho\gamma_\nu]\Psi^\nu.$$

Rarita-Schwingeri teoorias ilmneb verteks jällegi tensorkujul. Analooogia põhjal Diraci välja verteksiga võib kirjutada Rarita-Schwingeri vertekstensoriks

$$\Gamma^{\mu\rho\nu} = \frac{i}{\hbar}q[\gamma^\rho g^{\mu\nu} - (\gamma^\mu g^{\rho\nu} + \gamma^\nu g^{\rho\mu}) + \gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu]. \quad (2.3.9)$$

Siin on  $\mu$  ja  $\nu$  osakestega seotud indeksid ja  $\rho$  on footonindeks.

## 2.3.3 Feynmani reeglid

Lagranžiaanipõhise analüüsi ja spinn- $\frac{1}{2}$  teooria analooogia põhjal võib postuleerida RS teooria Feynmani reeglid. Propagaator- ja vertekstensor on esitatud eelmistes peatükkides, alg- ja lõppolekutes on oodata spinn- $\frac{3}{2}$  osakesi, mistõttu välised jooned peavad sisaldama vektorspiinoreid  $U_\mu$  spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste ja  $V_\mu$  antiosakeste jaoks. Välised footonjooned langevad kokku kvantelektrodünaamika Feynmani reeglitega. Tavalise Comptoni hajumise piirides ei ole muud elemendid olulised. Seega võib panna kirja järgmised Feynmani diagrammide elemendid:

1. propagaator

$$\longrightarrow = G_{\mu\nu}(p);$$



## 2. verteks

$$\text{Diagram: a vertex with two fermion lines and one photon line} = \Gamma_{\mu\rho\nu};$$

## 3. välised jooned

$$\text{Diagram: fermion line with arrow pointing right} = U_\mu(p, s),$$

$$\text{Diagram: photon line with arrow pointing left} = \varepsilon_\mu(k, \lambda),$$

$$\text{Diagram: fermion line with arrow pointing left} = \bar{U}_\mu(p, s),$$

$$\text{Diagram: photon line with arrow pointing right} = \varepsilon_\mu^*(k, \lambda).$$

Edasi võib nõuda analoogilist Feynmani reeglite kogumikku, nagu on esitatud Diraci teooria peatükis 1.2. Kuna Rarita-Schwingeri teoorias on diagrammide elemendid antud tensorkujul, siis maatriksielemendi moodustamisel on vajalik sobiv ahendamine, et tagada interaktsioonide järjepidevus, mille võib samuti lugeda reeglite hulka. Lagranžiaani ja diagrammi elementide tensorstruktuuri põhjal võib postuleerida:

6. tensorite ahendamisel jälgida, et järjestikused elemendid oleksid ahendatud koos: polarisatsioonivektor verteksiga üle vektorpotentsiaaliga seotud keskmise footonindeksi ( $\Gamma_{\mu\rho\nu}$  puhul  $\rho$ ), vektorspiinor üle lähima verteksi lähema (kui avaldis on reastatud üles) indeksi ja propagaator üle ümbritsevate verteksite indeksite, lähemad indeksid koos jne.

## 2.4 Feynmani diagrammid ja üleminekuamplituudid

Comptoni hajumise põhidiagrammid on juba antud. Puu tasemel diagrammide üleminekuamplituudide korrutise on võimalik võtta kokku ringdiagrammiks, nagu on antud joonisel 2.1, misjuhul impulsid liiguvad *off-shell*; ringdiagramm annab ülevaate indeksite järjestusest ja tema lõikamisel moodustuvad esialgsed huvipakkuvad üleminekuamplituudid *on-shell* impulssidega. Et elektromagnetväli on sama, siis põhimõtteline erinevus on üksnes protsessis osaleva osakese jaoks. Tõestuskäigud on esitatud lisas E.3 vastavates alajaotistes.

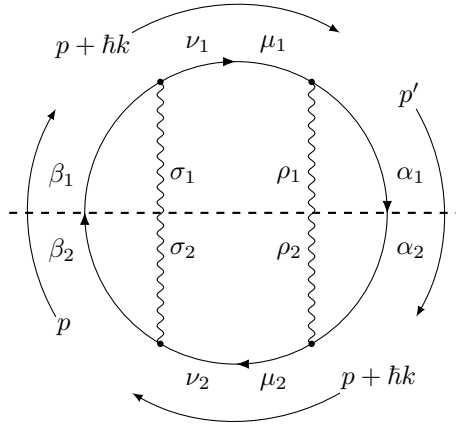
Võtame kasutusele notatsiooni tensorite jaoks:

$$\bar{A}_{\mu\nu} = \gamma_0 A_{\mu\nu}^\dagger \gamma_0. \quad (2.4.1)$$

See on analoogiline spiinorite adjungeerimisega ning seda tehet on ka käesolevas töös nimetatud adjungeerimiseks. Seda võib rakendada ka verteksitele, s.o  $\bar{\Gamma}^{\rho\mu\nu}$ . Ilmselt kehtib

$$A_{\mu\nu}^\dagger = \gamma_0 \bar{A}_{\mu\nu} \gamma_0. \quad (2.4.2)$$

Notatsiooni sissetoomine osutub vajalikuks kaaskompleksside arvutamisel, sest kui tensor on ümbritsetud vektorspiinoritega nagu  $\bar{\Psi}_\mu A^{\mu\nu} \Psi_\nu$ , on peale adjungeerimist  $\Psi_\nu^\dagger A^{\mu\nu\dagger} \bar{\Psi}_\mu^\dagger = \bar{\Psi}_\nu \bar{A}^{\mu\nu} \Psi_\mu$ . Kriipsuga saab tähistada avaldisi, mille sisemises struktuuris on gammamaatriksite järjekord



Joonis 2.1: Comptoni hajumise ringdiagramm  $|\overline{\mathcal{M}}_1|^2$  jaoks Rarita-Schwingeri teoorias.

ümber pööratud ning teisi elemente on hermiitiliselt konjugeeritud. See võimaldab siduda adjungeeritud tensori algsega, kus indeksite järjekorda on vahetatud.

Edasise huvides on tarvis leida verteksi ja propagaatori adjungeeritud variandid. Kehtib

$$\bar{\Gamma}^{\mu\rho\nu} = -\Gamma^{\nu\rho\mu}, \quad \bar{G}^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}. \quad (2.4.3)$$

Mitme elemendi koosinemisel miinusmärgid kompenseeruvad.

Võib kirjutada üleminekuamplituudid vahetult esitatud Feynmani reeglite ja Feynmani diagrammide põhjal:

$$i\mathcal{M}_1 = \bar{U}_\beta(p', s') \Gamma^{\beta\sigma\nu} G_{\nu\mu}(p + \hbar k) \Gamma^{\mu\rho\alpha} U_\alpha(p, s) \varepsilon_\rho(k, \lambda) \varepsilon_\sigma^*(k', \lambda') \quad (2.4.4a)$$

$$i\mathcal{M}_1^* = -\bar{U}_\alpha(p, s) \Gamma^{\alpha\rho\mu} G_{\mu\nu}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu\sigma\beta} U_\beta(p', s') \varepsilon_\rho^*(k, \lambda) \varepsilon_\sigma(k', \lambda') \quad (2.4.4b)$$

$$i\mathcal{M}_2 = \bar{U}_\beta(p', s') \Gamma^{\beta\sigma\nu} G_{\nu\mu}(p - \hbar k') \Gamma^{\mu\rho\alpha} U_\alpha(p, s) \varepsilon_\rho^*(k', \lambda') \varepsilon_\sigma(k, \lambda) \quad (2.4.4c)$$

$$i\mathcal{M}_2^* = -\bar{U}_\alpha(p, s) \Gamma^{\alpha\rho\mu} G_{\mu\nu}(p - \hbar k') \Gamma^{\nu\sigma\beta} U_\beta(p', s') \varepsilon_\rho(k', \lambda') \varepsilon_\sigma^*(k, \lambda). \quad (2.4.4d)$$

Üleminekuamplituudide põhjal tuleb arvutada liikmed avaldises (1.4.2). RS teooria üleminekutõenäosused saab teisendada kõik indeksid välja kirjutades jälgavaldiseks, näiteks

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_1|^2 &= \bar{U}_{\alpha_1}(p, s) \Gamma^{\alpha_1\rho_1\mu_1} G_{\mu_1\nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu_1\sigma_1\beta_1} U_{\beta_1}(p', s') \\ &\quad \bar{U}_{\beta_2}(p', s') \Gamma^{\beta_2\sigma_2\nu_2} G_{\nu_2\mu_2}(p + \hbar k) \Gamma^{\mu_2\rho_2\alpha_2} U_{\alpha_2}(p, s) \varepsilon_{\sigma_1}(k', \lambda') \varepsilon_{\sigma_2}^*(k', \lambda') \varepsilon_{\rho_1}^*(k, \lambda) \varepsilon_{\rho_2}(k, \lambda) = \\ &= A^{\alpha_1\rho_1\sigma_1\beta_1}_{ij}(p + \hbar k) U_{\beta_1j}(p', s') \bar{U}_{\beta_2k}(p', s') B^{\alpha_2\rho_2\sigma_2\beta_2}_{kl}(p + \hbar k) U_{\alpha_2l}(p, s) \bar{U}_{\alpha_1i}(p, s) \\ &\quad \varepsilon_{\rho_1}^*(k, \lambda) \varepsilon_{\rho_2}(k, \lambda) \varepsilon_{\sigma_1}(k', \lambda') \varepsilon_{\sigma_2}^*(k', \lambda') \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Spinni ja polarisatsioone ei vaadelda, mistõttu üle nende tuleb keskmistada. Vektorspiinorite spinnide üle keskmistamiseks on valemid teada, tuletuskäigu idee on antud näiteks doktoritöös

[26]: Diraci välja analoogial võib defineerida positiivsed ja negatiivsed massi projektsiooni-operaatorid

$$-\Lambda_+^{\mu\nu}(p)\sqrt{2p^2} = \sum_s U^\mu(p, s)\bar{U}^\nu(p, s), \quad (2.4.6a)$$

$$\Lambda_-^{\mu\nu}(p)\sqrt{2p^2} = \sum_s V^\mu(p, s)\bar{V}^\nu(p, s), \quad (2.4.6b)$$

mis rahuldavad tingimusi

$$\Lambda_{\mu\rho}^\pm \Lambda_\pm^{\rho\nu} = \Lambda_\mu^{\pm\nu}, \quad \Lambda_{\mu\rho}^\pm \Lambda_\mp^{\rho\nu} = 0, \quad \gamma_\mu \Lambda_\pm^{\mu\nu} = \Lambda_\pm^{\mu\nu} \gamma_\nu = 0, \quad (2.4.7)$$

massipinnal  $p^2 = m^2 c^2$  ka

$$p_\mu \Lambda_\pm^{\mu\nu} = \Lambda_\pm^{\mu\nu} p_\nu = 0. \quad (2.4.8)$$

Olgu märgitud, et Nykerki doktoritöös ei ole spinni summa seostel (2.4.6a) projektoriga koos antud liiget  $\sqrt{2p^2}$ . See on vektorspiinorite normeeringu küsimus. Ilma impulsi ruutu projitseerimata ei oleks valemid käesolevas töös dimensionaalselt kooskõlalised, mistõttu on dimensionaalsetel ja normeerimiskaalutlustel lisatudki liige  $\sqrt{p^2}$  (arvestatud ka Thomsoni piirjuhtu).

Operaatori võib arendada esitatud baasis suvaliste konstantide abil ning kui nõuda tingimuste (2.4.7) kehtimist, siis (analoogiliselt propagaatori arvutamisel esitatud meetodiga) jõutakse tuntud tulemuseni

$$\Lambda_{\mu\nu}^\pm = \frac{\pm \not{p} + \sqrt{p^2}}{2\sqrt{p^2}} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu \mp \frac{1}{3\sqrt{p^2}} (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) - \frac{2}{3p^2} p_\mu p_\nu \right]. \quad (2.4.9)$$

Massipinnal  $p^2 = m^2 c^2$ , mille võib üleminekuamplituudide avaldistes asendada.

Kui keskmistada üleminekuamplituudi mooduli ruutu (2.4.5) üle spinnide ja polarisatsioonide, saab anda avaldise jälje arvutamiseks sobival kujul,

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2} = \frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \text{Tr} \left[ \Gamma^{\alpha_1 \rho_1 \mu_1} G_{\mu_1 \nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu_1 \sigma_1 \beta_1} \Lambda_{\beta_1 \beta_2}^+(p') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p + \hbar k) \right] \cdot \quad (2.4.10)$$

$$\Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \Lambda_{\alpha_2 \alpha_1}^+(p) g_{\rho_1 \rho_2} g_{\sigma_1 \sigma_2} \Big] =$$

See on üleminekuamplituudi avaldis Rarita-Schwingeri teoorias otseseks arvutamiseks valmis kujul. Ilmutatult välja kirjutatud avaldis on antud lisas E.3.2.

Jälg mooduli ruudu  $\overline{|\mathcal{M}_2|^2} = \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_2}$  jaoks on lihtsasti kirja pandav üleminekuamplituudi  $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$  põhjal, kui asendada  $k \rightarrow -k'$  propagaatori avaldises, mistõttu seda avaldist ei korrata. On oluline märkida, et teades lõpptulemust (enne impulsi jäävuse või mõne teise  $p, p', k, k'$  vahelise seose kasutamist)  $\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$  jaoks, on lõpptulemus  $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$  sama moodi kirjutatav asendusega  $k \rightarrow -k'$ .

Järgmisena pakub huvi avaldis  $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2}$ . Võib kirjutada

$$\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2 = \bar{U}_{\alpha_1}(p, s) \Gamma^{\alpha_1 \rho_1 \mu_1} G_{\mu_1 \nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\sigma_1 \nu_1 \beta_1} U_{\beta_1}(p', s') \varepsilon_{\rho_1}^*(k, \lambda) \varepsilon_{\sigma_1}(k', \lambda') \quad (2.4.11)$$

$$\bar{U}_{\beta_2}(p', s') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p - \hbar k') \Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} U_{\alpha_2}(p, s) \varepsilon_{\rho_2}^*(k', \lambda') \varepsilon_{\sigma_2}(k, \lambda),$$

mistõttu peale keskmistamist saab kirjutada jälje

$$\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = \frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \text{Tr} \left[ \Gamma^{\alpha_1 \rho_1 \mu_1} G_{\mu_1 \nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu_1 \sigma_1 \beta_1} \Lambda_{\beta_1 \beta_2}^+(p') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p - \hbar k') \right. \\ \left. \Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \Lambda_{\alpha_2 \alpha_1}^+(p) g_{\rho_1 \sigma_2} g_{\rho_2 \sigma_1} \right]. \quad (2.4.12)$$

Ilmutatud avaldis on antud lisas E.3.2. Analoogiliselt spinn- $\frac{1}{2}$  juhuga saab näidata, et  $\overline{|\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2|^2} = \overline{|\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1|^2}$ . Selle näitamiseks esmalt ilmselt  $\bar{A} = A$  ja kehtib  $\bar{\Lambda}_{\mu\nu}^\pm = \Lambda_{\nu\mu}^\pm$ , mistõttu võib kirjutada

$$\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = -\frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \left[ \bar{\Gamma}^{\mu_1 \rho_1 \alpha_1} \bar{G}_{\nu_1 \mu_1}(p + \hbar k) \bar{\Gamma}^{\beta_1 \sigma_1 \nu_1} \Lambda_{\beta_1 \beta_2}^+(p') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p - \hbar k') \right. \\ \left. \Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \Lambda_{\alpha_2 \alpha_1}^+(p) g_{\rho_1 \sigma_2} g_{\rho_2 \sigma_1} \right] = \\ = -\frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \left[ \bar{\Gamma}^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \bar{G}_{\nu_2 \mu_2}(p - \hbar k') \bar{\Gamma}^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} \Lambda_{\beta_2 \beta_1}^+(p') \Gamma^{\beta_1 \sigma_1 \nu_1} G_{\nu_1 \mu_1}(p + \hbar k) \right. \\ \left. \Gamma^{\mu_1 \rho_1 \alpha_1} \Lambda_{\alpha_1 \alpha_2}^+(p) g_{\rho_1 \sigma_2} g_{\rho_2 \sigma_1} \right] = \\ = \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1} \quad (2.4.13)$$

kus on ära kasutatud jälje tsüklilisuse omadust  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$ . Seega tõepoolest  $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1}$ , mis on analoogiline spinn- $\frac{1}{2}$  välja juhuga ja lihtsustab arvutustööd.

Summaarse üleminekuamplituudi jaoks on kõik jälgavaldised leitud. Ei ole võimalik kasutada naiivset meetodit jälgede arvutamiseks avaldiste liigse keerukuse tõttu: kui avada kõik sulud, siis kokku tuleb 23 040 000 liiget. Avaldise on võimalik lihtsustada, näiteks Wardi-Takahashi identitsuse

$$(p' - p)^\rho \Gamma_{\mu\rho\nu}(A) = \mathcal{K}_{\mu\nu}(p', A) - \mathcal{K}_{\mu\nu}(p, A) \quad (2.4.14)$$

abil, nagu seda on tehtud artiklis [32]. Avaldise lihtsustamist kergendab palju arvuti algebra-süsteemide kasutamine. Käesoleva töö autor kirjutab aga sümbolarvutussüsteemis FORM (versioon 4.2.0) [39] koodi jälgede ja summaarse keskmistatud üleminekuamplituudi mooduli ruudu arvutamiseks. Programmikood on antud lisas F.1 (koodis on loomulikud ühikud,  $c = \hbar = 1$ ).

FORM töötas neljas moodulis (igauks neist lõpetatud punktiga algava lausega). Neljast jälgavaldisest summaarses üleminekuamplituudis (1.4.2) on sõltumatud ainult kaks. FORMil tuli arvutada üksnes kaks sõltumatut jälge, mis oli esimese mooduli ülesanne. Avaldis  $\overline{|\mathcal{M}_2|^2}$  jälje jaoks leiti asenduse teel teises moodulis. Kuna kasutatud Feynmani diagrammid eeldavad massipinnal olemist, on võimalik skalaarruute  $p_1 \cdot p_1$  jne asendada erirelatiivsusteooriast teada valemitega, protsessi neliimpulsi jäävus vähendab sõltumatute suuruste arvu kolmele ( $p_1, p_2, k_1, k_2 \rightarrow p_1, k_1, k_2$ ) — need lihtsustused viidi läbi kolmandas plokis. Viimases moodulis arvutati summaarse keskmistatud üleminekuamplituudi mooduli ruut varasemate tulemuste põhjal, lisades jälgede kordajad. FORMi tulemused on antud lisas F.2.

Mõjuristlõike arvutamisel on tarvis minna konkreetseesse taustsüsteemi. Sarnaselt spinn- $\frac{1}{2}$  teooria juhuga on esitatud hajumise kirjeldus taustsüsteemis, kus osake on esialgu paigal, s.o

laboratooriumi taustsüsteemis. Peale lihtsustamist on

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{128\pi^2\alpha_q^2}{81} \bigg\{ & 196 - 81 \sin^2 \theta - 124\omega\omega' \frac{\hbar^2}{m^2 c^4} \\ & -23 \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) + 6 \left( \frac{\omega^2}{\omega'^2} + \frac{\omega'^2}{\omega^2} \right) \\ & + 8 \left( \frac{\omega^2}{\omega'} - \frac{\omega'^2}{\omega} \right) \frac{\hbar}{mc^2} + 30 \left( \frac{\omega^3}{\omega'} + \frac{\omega'^3}{\omega} \right) \frac{\hbar^2}{m^2 c^4} \\ & + 68 (\omega\omega'^2 - \omega^2\omega') \frac{\hbar^3}{m^3 c^6} + 8 (\omega\omega'^3 + \omega^3\omega') \frac{\hbar^4}{m^4 c^8} \\ & + 184 (\omega - \omega') \frac{\hbar}{mc^2} + 88 (\omega^2 + \omega'^2) \frac{\hbar^2}{m^2 c^4} + 12 (\omega^3 - \omega'^3) \frac{\hbar^3}{m^3 c^6} \bigg\}. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Tulemust võib vaadata kui funktsiooni kahest argumendist  $\omega$  ja  $\omega'$ , mis on seotud Comptoni valemi (1.4.16) abil.

Valem (2.4.15) on käesoleva töö põhitulemus, ta annab Comptoni hajumise kirjelduse Rarita-Schwingeri teoorias. Tegu ei ole kõikehõlmava kirjeldusega, sest on arvestatud üksnes puu tasemel, s.o madalaimat järku häiritusteooria tasemel arvatud panuseid üleminekuamplituudi, aga on oodata (häiritusteooria olemusest), et sellega on antud peaosa üleminekutõenäosusest ning kõrgemat järku parandid ei mõjuta tulemusi väga olulisel määral. Samuti kirjeldab valem üksnes tavalist Comptoni hajumist RS teoorias, kõrvale on jäetud spinn- ja polarisatsiooniefektid (mis on olulised näiteks magnetilises Comptoni hajumises). Kõrgemat järku häiritusteooria kasutamine ja Comptoni hajumise alamklasside kirjelduse arvutamine on võimalik töö arendus.

### 3. Diraci teooria ja Rarita-Schwingeri teooria tulemuste võrdlus

Olgu ülevaate huvides esitatud Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teooria ja Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria summaarsete keskmistatud üleminekuamplituudide avaldised laboratooriumi taustsüsteemis (esialgu laetud osake paigal,  $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ ) kõrvuti.

1. Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teooria:

$$|\overline{\mathcal{M}_D}|^2 = 128\pi^2\alpha_q^2 \left[ \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - \sin^2 \theta \right], \quad (3.0.1)$$

lihtsustamata kujul

$$|\overline{\mathcal{M}_D}|^2 = 128\pi^2\alpha_q^2 \left[ \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} \right) + 2\frac{mc^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right) + \frac{m^2c^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega'} \right)^2 \right]. \quad (3.0.2)$$

2. Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria:

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_{RS}}|^2 = \frac{128\pi^2\alpha_q^2}{81} \bigg\{ & 196 - 81 \sin^2 \theta - 124\omega\omega' \frac{\hbar^2}{m^2c^4} \\ & - 23 \left( \frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} \right) + 6 \left( \frac{\omega^2}{\omega'^2} + \frac{\omega'^2}{\omega^2} \right) \\ & + 8 \left( \frac{\omega^2}{\omega'} - \frac{\omega'^2}{\omega} \right) \frac{\hbar}{mc^2} + 30 \left( \frac{\omega^3}{\omega'} + \frac{\omega'^3}{\omega} \right) \frac{\hbar^2}{m^2c^4} \\ & + 68(\omega\omega'^2 - \omega^2\omega') \frac{\hbar^3}{m^3c^6} + 8(\omega\omega'^3 + \omega^3\omega') \frac{\hbar^4}{m^4c^8} \\ & + 184(\omega - \omega') \frac{\hbar}{mc^2} + 88(\omega^2 + \omega'^2) \frac{\hbar^2}{m^2c^4} + 12(\omega^3 - \omega'^3) \frac{\hbar^3}{m^3c^6} \bigg\}. \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Selles peatükis on normeeritud osakesi kirjeldavad suurused samaks: laeng elementaarlaenguks  $q = 1e$ ,  $\alpha_q \approx \frac{1}{137}$ , osakese mass elektroni massiks  $m = 1m_e \approx 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg. Saadud valem (3.0.3) nõustub varasemate uuringutega [32, 40].

Eksperimentaalselt huvipakkuv on mõjuristlõige, mis kvantväljateoorias antakse valemiga (1.3.4). Et faasiruumielement on kinemaatiline suurus ja nii spinn- $\frac{1}{2}$  teooria kui ka Rarita-Schwingeri teooria korral sama ning ka üldine kordaja osutub muutumatuks, siis teooriate

võrdluses saaks keskenduda just summaarsetele keskmistatud üleminekutõenäosustele (3.0.1) ja (3.0.3). Konkreetseuse ja tõlgenduse lihtsuse huvides on võrreldud just mõjuristlõikeid. Diferentsiaalse mõjuristlõike jaotust üle footoni lõppimpulsi ei ole esitatud, sest see ei anna teavet, mis ei sisalduks jaotuses üle ruuminurga, kusjuures üks on teiseks teisendatav, kui lihtsustada

$$\frac{d\sigma}{d|\mathbf{k}'|} \frac{d|\mathbf{k}'|}{d\theta} = \frac{d\sigma}{d\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{d\theta}.$$

### 3.1 Funktsionaalne kuju ja täismõjuristlõige

Lihtsaim erinevus on seotud avaldiste ja nende arvutuskäikude keerukusega. Spinn- $\frac{1}{2}$  teooria üleminekuamplituudi (mooduli ruudu) on võimalik kätte saada ilmutatud arvutuste teel käsitsi. Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria üleminekuamplituudide jälje otsene arvutamine on võimalik ainult sümbolarvutussüsteemide abiga või lisalihtsustustega. Spinn- $\frac{3}{2}$  teooria keerukus kasvab väga kiiresti: kui spinn- $\frac{1}{2}$  teooria jälgavaldistes on liikmeid suurusjärgus  $\sim 30\text{--}40$ , siis spinn- $\frac{3}{2}$  teoorias on suurusjärguks  $\sim 23\,000\,000$ . Summaarne keskmistatud (lihtsustamata) üleminekutõenäosus sisaldab spinn- $\frac{1}{2}$  teoorias 7 liiget, aga Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teoorias 25 liiget. Jätkates spinn- $\frac{5}{2}$ , spinn- $\frac{7}{2}$  jne formalismidega Rarita-Schwingeri teoorias, on potentsiaalne oht, et praktiliste arvutuste jaoks ettenähtud avaldised muutuvad ilmutatud viisil lahendamatuks keerukaks ja nõuavad lihtsustusskeemide välja töötamist.

Keerukuse kasv väljendub ka üleminekutõenäosuste funktsionaalses kujus. Kleini-Nishina valemi lihtsustamata üleminekutõenäosuses (3.0.2) on footonite ringsagedused ülimalt teises astmes liikmetes  $\frac{1}{\omega^2}$ ,  $\frac{1}{\omega'^2}$ ,  $\frac{2}{\omega\omega'}$ . Rarita-Schwingeri teoorias tekib juurde ringsageduste kombinatsioon mis on ringsagedustega kuni neljandas astmes (liikmed  $\omega\omega'^3$  ja  $\omega^3\omega'$ ). Dimensionaalseks tasakaalustamiseks on mõlemas teoorias taandatud Comptoni lainepikkusega seotud tegur  $\frac{\lambda_q}{c}$ .

Algfootoni väikese energia korral on protsess kirjeldatav Thomsoni hajumisena, s.o tegu on klassikalise kiirguse hajumisega, mis võimaldab teatud ulatuses teooriaid kontrollida. Thomsoni piirjuhul  $\omega \rightarrow 0$ , mistõttu valemist (1.4.16) järeldub, et  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega}{\omega'} = 1$ . Siis on ilmne, et

$$|\overline{\mathcal{M}_D}|_{\omega \rightarrow 0}^2 = 128\pi^2 \alpha_q^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad (3.1.1)$$

$$|\overline{\mathcal{M}_{RS}}|_{\omega \rightarrow 0}^2 = 128\pi^2 \alpha_q^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.1.2)$$

Koos faasiruumi ja konstantse kordajaga saadakse tõepoolest tuntud Thomsoni hajumise jaotus

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\hbar^2 \alpha_q^2}{2m^2 c^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.1.3)$$

Kleini-Nishina valemi kehtimine on juba tuntud, aga on näha, et ka Rarita-Schwingeri teooria annab õige madalaenergialise piirjuhu. Niisuguses võrdluses võib Comptoni hajumist pidada ka spinni ilminguks, kuna Thomsoni piirjuhul annavad erineva spinniga teooriad sama tulemuse ning ka Thomsoni hajumise kirjelduses ei teha tavaliselt eeldusi osakese spinni kohta (eksperimentaalne uuring spinnefektide mõju kohta nt [41]), kuigi puhtteoreetilise tasemega piirdumisel

võib seda lugeda ka teooria moodustamise iseärasuseks (RS teooria moodustamisel on kasutatud spiinoresitusi).

Täismõjuristlõike võib arvutada, kui asendada üleminekuamplituudid jaotusvalemitesse (1.5.3) ja integreerida üle jaotuse muutuja  $\hbar|\mathbf{k}'|$ ,  $\cos(\theta)$  või  $\Omega$ . Valides näiteks  $\cos(\theta)$  ja kasutades ära

$$\frac{d\sigma}{d\cos(\theta)} = \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{d\theta}{d\cos(\theta)} = -\frac{d\sigma}{d\theta} \frac{1}{\sin\theta},$$

võib täismõjuristlõike peale integreerimist rajades  $0 \leq \theta \leq \pi$  arvutada. See on omaette töövaev, mille jaoks võib kasutada arvutialgebra abi, kuid lõpptulemused on

$$\sigma_D = \frac{\alpha^2 \pi}{m\hbar\omega^3(mc^2 + 2\hbar\omega)^2} \left[ 2\hbar\omega(2m^3c^6 + 8m^2c^4\hbar\omega + 9mc^2\hbar^2\omega^2 + \hbar^3\omega^3) - \right. \quad (3.1.4)$$

$$\left. - (mc^2 + 2\hbar\omega)^2(2m^2c^4 + 2mc^2\hbar\omega - \hbar^2\omega^2) \ln\left(1 + 2\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right) \right],$$

$$\sigma_{RS} = \frac{\alpha^2 \pi}{243m^5c^8\hbar\omega^3(mc^2 + 2\hbar\omega)^4} \quad (3.1.5)$$

$$\left[ 2\hbar\omega(486m^9c^{18} + 3888m^8c^{16}\hbar\omega + 12219m^7c^{14}\hbar^2\omega^2 \right.$$

$$+ 18927m^6c^{12}\hbar^3\omega^3 + 15510m^5c^{10}\hbar^4\omega^4 + 8182m^4c^8\hbar^5\omega^5$$

$$+ 4344m^3c^6\hbar^6\omega^6 + 1444m^2c^4\hbar^7\omega^7 + 232mc^2\hbar^8\omega^8 + 144\hbar^9\omega^9) -$$

$$- 3m^2c^4(mc^2 + 2\hbar\omega)^4(162m^4c^8 + 162m^3c^6\hbar\omega + 23m^2c^4\hbar^2\omega^2 - 8mc^2\hbar^3\omega^3 -$$

$$\left. - 30\hbar^4\omega^4) \ln\left(1 + 2\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right) \right].$$

Mõlemad valemid annavad sama Thomsoni piirjuhu

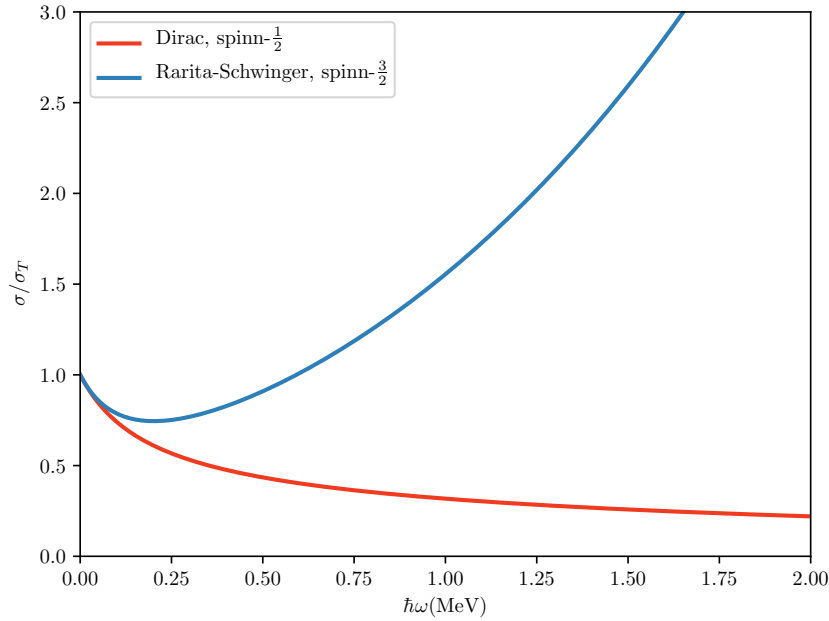
$$\sigma_T = \frac{8\pi\alpha_q^2\hbar^2}{3m^2c^2} \approx 0,665 \text{ b}, \quad (3.1.6)$$

kuid kõrgeenergialine käitumine on oluliselt erinev. Täismõjuristlõike sõltuvus algfootoni energiast on kujutatud joonisel 3.1.

Võttes piirväärtuse, on  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_D = 0$ , samas kui  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \sigma_{RS} = \infty$ , nagu paistab ka joonisel 3.1. Sealjuures on RS teoorias protsessi kiirus  $\mathcal{O}(\omega^3)$ . See on põhimõtteline erinevus spinn- $\frac{1}{2}$  teooriast: Rarita-Schwingeri teooria järgi elementaarsed spinn- $\frac{3}{2}$  osakesed põhjustavad hajumise suurenemist kiirguse energia kasvul, s.o keskkond muutuks justkui raskemini hajumata läbitavaks.

Sellise tulemuse tõepärasus tekitab küsimusi. Kvalitatiivselt on oodata pigem vastupidist, et energiatega suurenemisel mõjuristlõige väheneb, nagu see on spinn- $\frac{1}{2}$  teoorias, ning teatud punktini nii ka on, kuid peale mida algab ristlõike tõkestamatu kasv. Hadronite (nt piionite) hajumises on võimalik anda mõjuristlõikele rangem Froissart' tõke  $\sigma_{\text{tot}} = \mathcal{O}(\log^2 s)$  [42, 43] ( $s$  on Mandelstami muutuja), aga Froissart' tõke kehtib üksnes puhtalt hadronilistele protsessidele, s.o Comptoni hajumise jaoks Froissart' tõket ei tule [44].





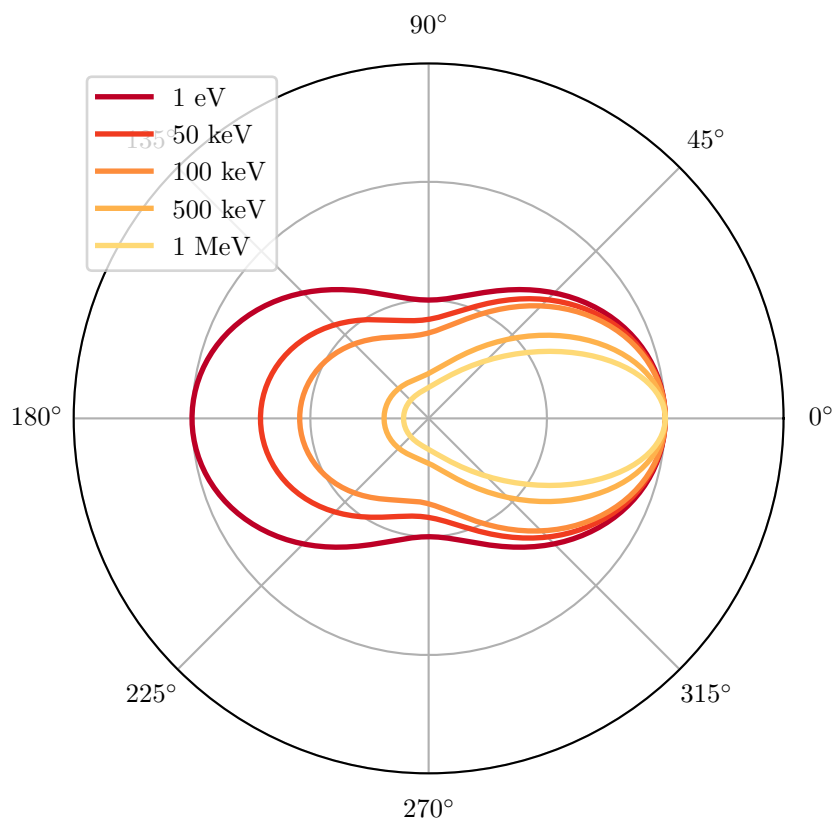
Joonis 3.1: Täismõjuristlõike sõltuvus algfootoni energiast.

On võimalik, et madalaimat järku häiritusteooria ei ole piisav spinn- $\frac{3}{2}$  hajumisristlõigete täpseks arvutamiseks ja peab arvutama kõrgemat järku parandid. See aga tähendaks, et puu tasemel diagrammid üksi ei anna RS teoorias peaosa üleminekutõenäosusest. Põhimõtteliselt on ka võimalik, et Rarita-Schwingeri teooria annab õige ennustatava käitumise spinn- $\frac{3}{2}$  osakestele, misjuhuks on tegu tõepoolest eksootiliste omadustega osakestega, kuid algsel kujul RS teooria tulemuste kasutamisele räägivad vastu teooriasisesed probleemid (ptk 5). Comptoni hajumist on uuritud näiteks NKR formalismis [32], mis on üks RS teooria parandusskeemidest, misjuhuks on jõutud kvalitatiivselt sarnase mõjuristlõike kasvuni, kuigi erineva funktsionaalse kujuga. Küsimus nõuab täpsemat uurimist, aga käesolevad tulemused lubavad oodata anomaalset kõrgeenergialist käitumist elementaarsete spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste jaoks.

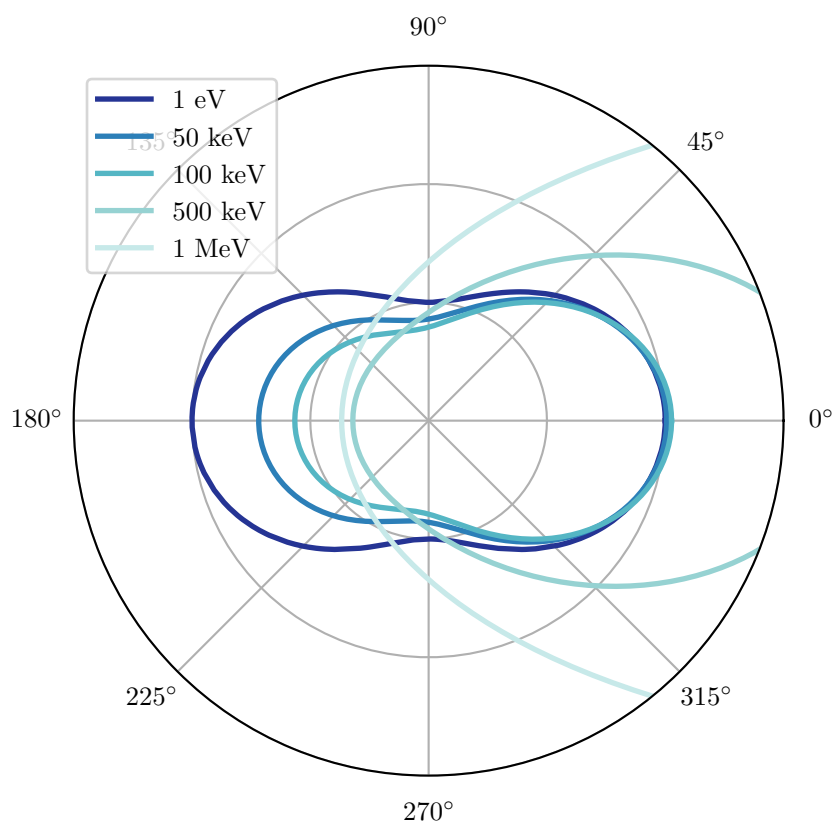
## 3.2 Mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga

Kui asendada üleminekutõenäosused jaotusvalemisse (1.5.3c), saab diferentsiaalse mõjuristlõike jaotuse üle ruuminurga, mis on tavaliselt eksperimentaalselt kõige enam vaadatud jaotus. Täpne funktsionaalne kuju on leitav asenduse teel, huvipakkuvad graafikud on esitatud joonisel 3.2. Jaotus on sõltumatu asimuutnurgast  $\phi$ , mistõttu piisab vaadata jaotusi polaarnurga alusel, mis antud juhul vastab ka hajumisnurgale. Esialgu on osake paigal ja footon liigub paremale  $0^\circ$  suunas. Jooned on normeeritud Thomsoni piirjuhu ristlõikele edasisuunas, s.o graafikutel on  $\text{norm } \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} = \frac{\hbar^2 \alpha_q^2}{m^2 c^2} \approx 0,079 \text{ b} \equiv 1$ .

Joonise 3.2 esimesed järeldused langevad kokku peatükis 3.1 pakututega. Madalaenergialise



(a) Dirac,  $\text{spinn-}\frac{1}{2}$



(b) Rarita-Schwinger,  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$

Joonis 3.2: Diferentsiaalse mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga  $\text{spinn-}\frac{1}{2}$  ja  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  teoorias.

käitumise, s.o Thomsoni piirjuhul hajumise jaoks annavad nii  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  kui ka RS  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  teooria samasuguse klassikalise käitumise. Madalatel energiatel on ette ja taha hajunud kiirgus ligikaudu sama mõjuristlõikega, samas kui külgedele hajub veidi vähem kiirgust.

Vahepealsetel energiatel on alguses periood, kui nii  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  kui ka  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  teooria käituvad sarnaselt: ettehajumine püsib ligikaudu muutumatuna, samal ajal kui tagasihajumine väheneb. Sealjuures  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  teooria tagasihajumine väheneb veidi aeglasemini kui  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  Comptoni hajumises. See vastab lõigule graafiku 3.1 alguses, kui RS teoorias täismõjuristlõige väheneb. Jätkuvalt on ettehajunud kiirguse mõjuristlõige ligikaudu muutumatult Thomsoni ettehajumise mõjuristlõike väärtuse juures.

Kõrgeenergialises käitumises ilmub oluline erinevus, RS teooria ennustab hajumisristlõike tõkestamatut kasvu algfootoni energia kasvul erinevalt Diraci teooriast, mis ennustab mõjuristlõike vähenemist. Mõjuristlõike (ja seega ka hajunud kiirguse) jaotuses ilmuvad olulised erinevused.  $\text{Spinn}-\frac{1}{2}$  teooria ennustab hajunud kiirguse koondumist ainult ette suunas, külgedele ja taha hajumine väheneb pidevalt energia kasvades. Samas RS  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  teooria korral esialgu tagasihajunud kiirguse mõjuristlõige väheneb, kuid seejärel hakkab mõjuristlõige kasvama kõigis suundades, s.o hajumine tugevneb igas suunas, kus peaosa siiski hajub eesmisesse footoni algse liikumise suunda. Samuti ületab  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  teooria mõjuristlõige ettehajumisel Thomsoni ettehajumise diferentsiaalset mõjuristlõiget.

Rarita-Schwingeri teooria ennustab  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  osakeste Comptoni hajumise kõrgeenergialist käitumist oluliselt erinevaks  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  Comptoni hajumisest, samas kui madalaenergialine ja vahepealsete energiatega juhud on ligilähedaselt sarnased. Kõige olulisem RS teooria ennustus on üldine (nii ette, külgedele kui ka taha) hajunud kiirguse mõjuristlõike suurenemine langenud kiirguse energia kasvul, mis on täiesti erinev  $\text{spinn}-\frac{1}{2}$  teooriast. Kui selline mõjuristlõike jaotus osutub tõeseks, on elementaarsed  $\text{spinn}-\frac{3}{2}$  osakesed eksootiliste elektromagnetilise interaktsiooni omadustega.

## 4. Teoreetiliste tulemuste võrdlus eksperimentaalsete andmetega

Elementaarseid spinn- $\frac{3}{2}$  osakesi ei ole seni avastatud. Näiteks juba [45], mis järgnes vahetult Rarita-Schwingeri algartiklile, näitas, et neutriino ei ole spinniga  $\frac{3}{2}$ , ning sellest saati ei ole elementaarsete spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste eksperimentaalse avastamise osas olnud edusamme. Mitteelementaarseid kõrgema spinniga osakesi on aga teada mitmeid. Mitteelementaarsed, kuid kõrgema spinniga võivad olla aatomituumad, aga väiksemal tasemel mõni osake näiteks barüonide deküpleti  $\Delta$ -,  $\Sigma$ -,  $\Xi$ - ja  $\Omega$ -osakeste hulgast (hüperonid ja  $\Delta$ -resonantsid). Barüonide deküpleti osakesed koosnevad kolmest kvargist ja ei ole üldiselt stabiilsed.

Võib kohe anda kriitikat elementaarosakeste teooria võrdlemisele mitteelementaarsete osakeste katseandmetega. Mitteelementaarsus on põhimõtteline erinevus, olgugi et  $\Delta^+$ -resonantsi peamine erinevus prootonist on just kvarkide spinnide orientatsioonis, millest tuleneb spinni erinevus (prootoni korral on  $d$ -kvargi spinn vastassuunas,  $\Delta^+$ -resonantsi korral samas suunas kui teistel kvarkidel). Comptoni hajumine on kõrge energia hajumisnähtus, suurtel energiatel ei pruugi enam toimuda Comptoni hajumine üksi, vaid lisaks mõni muu nähtus (nt piionite teke), ning ka väiksematel energiatel ei saa välistada mitteelementaarsusest tingitud väiksema spinniga komponentide olulist mõju. Seega on sageli tegu praktiliselt keeruliselt teostatavate mõõtmistega nii häirivate protsesside kui ka uuritava osa (nt konkreetselt  $\Delta$ -resonantsi Comptoni hajumise) isoleerimise raskuse tõttu. Sellele vaatamata on Rarita-Schwingeri teooriat kasutatud näiteks  $\Delta(1232)$ -resonantside tekke ja käitumise kirjeldamisel [46]. Paremate eksperimentaalsete andmete puudumisel on esitatud tulemused prootonite Comptoni hajumisest  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas, kuigi neisse andmetesse tuleb teooria õigsuse hindamisel suhtuda pigem umbusklikult. Parimal juhul eristub katseandmetes  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas kvalitatiivselt erinev, aga RS spinn- $\frac{3}{2}$  teooriaga sarnane, käitumine.

### 4.1 Spinn- $\frac{1}{2}$ osakeste Comptoni hajumine

Kleini-Nishina valemi õigsus on hästi teada ning ta ei vaja olulist kinnitust, eksperimentaalne kontroll on tänapäevaste meetoditega viidav praktikumieksperimendi lihtsuseni. Ülevaade

footonite hajumisest elektronidel on antud näiteks artiklis [47]: vaatamata sellele, et arvestatakse üksnes puu tasemel diagramme, on footonite energiatega 1–20 MeV korral Kleini-Nishina valemi kooskõla eksperimentaalsete tulemustega märkimisväärne (täpsuseni  $\sim 10\%$ ), vajadusel arvestades mitmekordsest hajumisest tingitud parandeid. Suurte energiatega (üle 100 MeV) korral kooskõla väheneb ja on tarvis arvestada rohkem parandeid; hajumise korral komposiitosakestelt, nt prootonitelt, võivad samuti esineda suured erinevused.

Prootonite Comptoni hajumist vaadatakse tihti kiraalsetes efektiivsetes väljateooriates [48–50]. Prooton on spinn- $\frac{1}{2}$  liitosake, ta koosneb kvarkidest  $uud$ , mille koosmõju osutub Comptoni hajumise jaoks oluliseks. Hajumise kirjelduse muudabki keeruliseks prootonite sisestruktuur, mis vajab kvantkromodünaamilist kirjeldust, aga samas avaldavad mõju ka teised nähtused, näiteks piionite teke (alates teatud piirist) ja  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas põhimõtteliselt erinev käitumine.

## 4.2 Prootonite Comptoni hajumine $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas

Tuntud eksperimendid, kus avaldub spinn  $\frac{3}{2}$ , on prootonite Comptoni hajumine  $\Delta(1232)$ -resonantsi piirkonnas.  $\Delta(1232)$ -barüon on spinn- $\frac{3}{2}$  liitosake (või täpsemini öeldes osakeste klass), mis koonseb kolmest kvargist,  $\Delta^+$  puhul kvarkidest  $uud$  ja  $\Delta^0$  korral  $udd$ , mille spinnid on orienteerunud samas suunas.  $\Delta^+$ - ja  $\Delta^0$ -barüonidele vastavad kvarkehitud järgi (samast järjestuses) prootonid ja neutronid ning neid  $\Delta$ -barüone võib nimetada prootonite ja neutronite kõrgema massiga ergastusteks;  $\Delta^-$  ja  $\Delta^{++}$  jaoks ei ole nukleonvastet.

$\Delta$ -barüonide omadused on antud näiteks teatmikus [51]. Võrreldes tavaliste prootonitega, on vastavate  $\Delta^+$ -barüonide mass suurem ( $938 \frac{\text{MeV}}{c^2}$  vs  $1232 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ ) ning nad on spinniga  $\frac{3}{2}$ , kuid neil on sama elektrilaeng  $+1e$ .  $\Delta$ -barüonid ei ole stabiilsed osakesed, nende keskmine eluiga on  $\sim 5,63 \cdot 10^{-24}$  s.

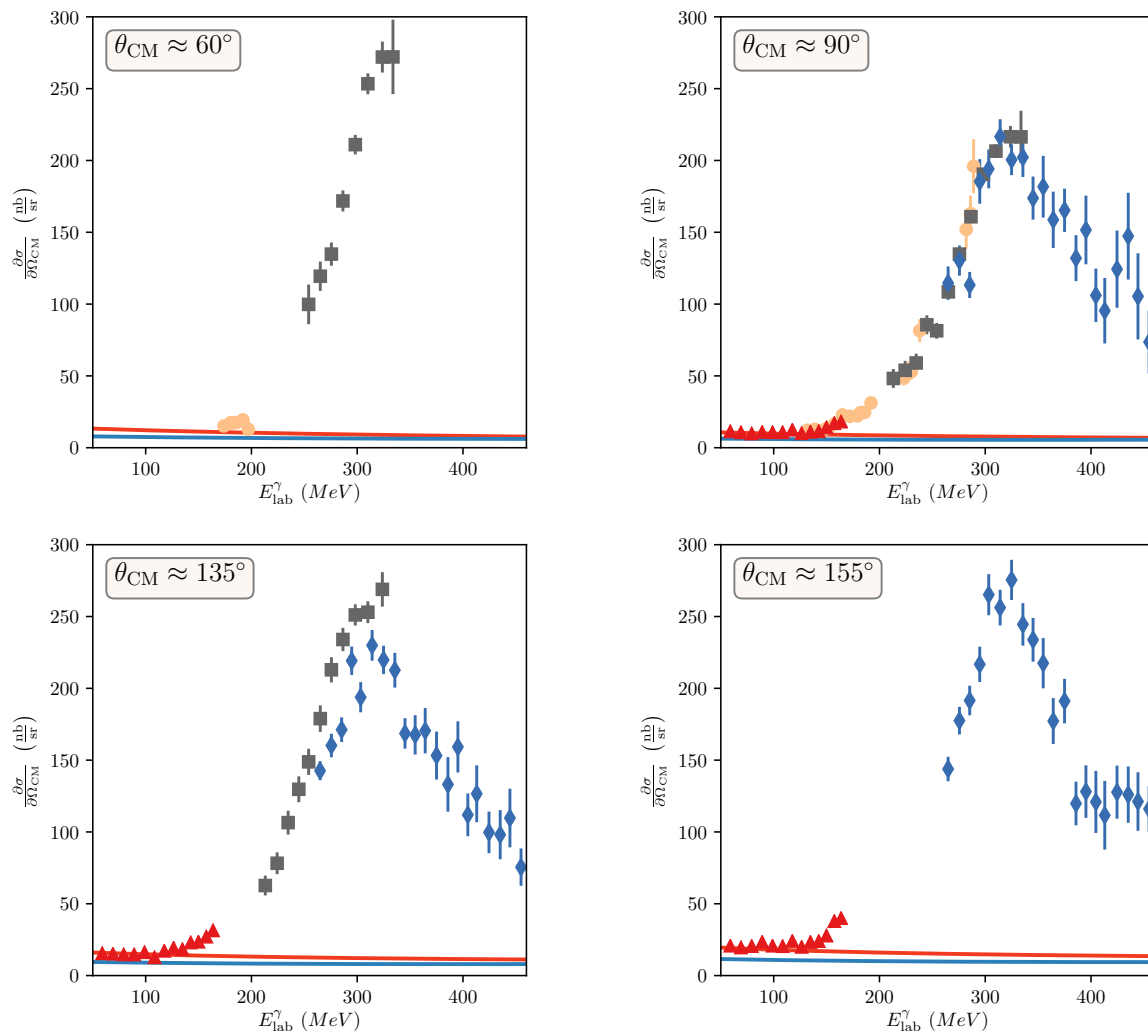
Materjale prootonite Comptoni hajumise kohta on palju, näiteks [52–56]. Tulemusi on analüüsitud näiteks artiklites [46, 48–50], kusjuures Rarita-Schingeri teooriat on sageli kasutatud  $\Delta$ -barüonide lainefunktsioonide moodustamisel, kuid efektiivsete teooriate raames. Antud juhul pakub huvi ainult esimene  $\Delta^+$ -resonantsi piirkond, s.o vaatluse all on ainult mõõtepunktid, mille langeva footoni energia on väiksem kui  $\sim 450$  MeV.

Eksperimentaalsed andmed on võetud allikatest [53–56]: punaste kolmnurkadega on tähistatud [53] mõõtepunkte, beežide ringidega [54], tumehallide ruutudega [55] ja siniste rombidega [56] tulemusi. Graafikutel on võetud erinevates allikates lähedased väärtused kokku, lubatud erinevus graafikule kirjutatud arvvaartusest on  $\pm 2^\circ$  ja  $\pm 5$  MeV. Seepärast on täpsed arvvaartused ja vearistide ulatused tinglikud, aga näitavad eksperimentaalsete tulemuste põhilisi iseärasusi. Esimene  $\Delta^+$ -resonantsi piirkond ilmub energiavahemikus 200–400 MeV.

Katseandmed on üldiselt antud massikeskme taustsüsteemis, kuid senine analüüs on tehtud laboratooriumi taustsüsteemis. Diferentsiaalne mõjuristlõige ei ole Lorentzi-invariantne ning on

tarvis leida teisendusvalemi laboratooriumi (lab) taustsüsteemis massikeskme (CM) süsteemi. See tuleuskäik on antud lisas G. Kõik tulemused on antud massikeskme (CM) taustsüsteemis.

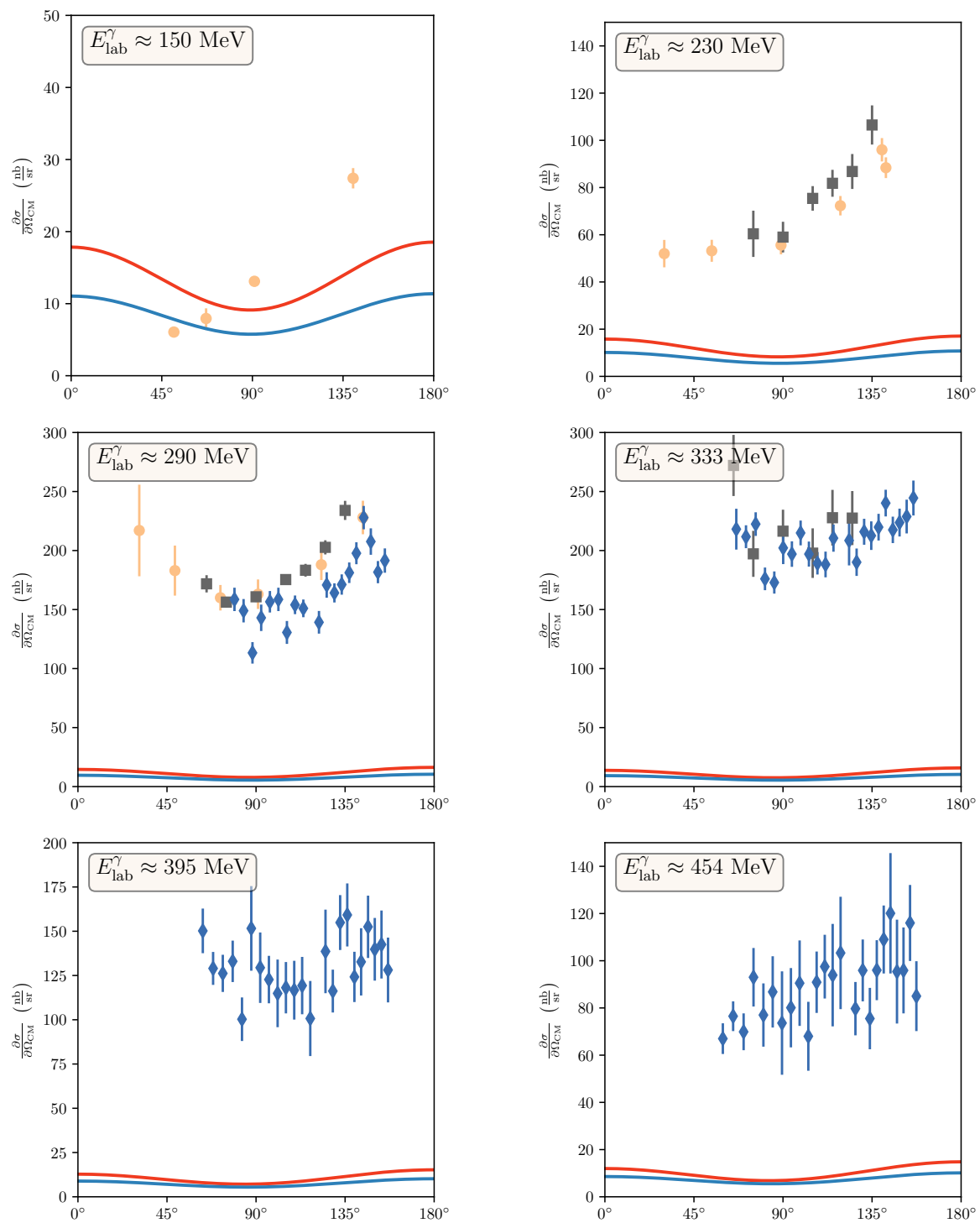
Teoreetilised andmed on konstrueeritud prootonite jaoks puhtas Diraci teoorias ning  $\Delta^+$ -barüonide jaoks puhtas Rarita-Schwingeri teoorias; osakesi kirjeldavad suurused on võetud allikast [51]. Sinise pideva joonega on tähistatud RS teooria tulemusi, punase joonega Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teooria tulemusi. Diraci ja Rarita-Schwingeri teooriasse ei jää vabasid parameetreid, kuna osakeste suurused on varasemate eksperimentide põhjal juba määratud. Osakesi iseloomustavate suuruste mõõtemääramatus ei avalda olulist mõju, mistõttu on spinn- $\frac{1}{2}$  ja spinn- $\frac{3}{2}$  teooria kõverate joonestamisel kasutatud üksnes parimat hinnangut. Diraci teooria jaoks on kasutatud parameetritena prootoni massi 938.272 MeV,  $\Delta^+$ -resonantsi kirjeldamiseks RS teoorias  $\Delta^+$ -barüoni massi 1234.9 MeV. Mõlemas teoorias kasutati sama elektrilaengut.



Joonis 4.1: Prootonite Comptoni hajumise mõjuristlõike sõltuvus footoni algenergiast eksperimentides ning Diraci ja Rarita-Schwingeri teoorias.

Joonisel 4.1 on antud prootonite Comptoni hajumise mõjuristlõike (ühik  $\frac{\text{nb}}{\text{sr}}$ ) sõltuvus footoni algenergiast (MeV) valitud hajusmisnurkade korral. On ilmne, et  $\Delta$ -resonantsi piirkonnas ei suuda ei Diraci ega Rarita-Schwingeri teooria ennustada õiget mõjuristlõiget ei kvantitatiivselt ega kvalitatiivselt. Katses vaadatud piirkonnas erinevad spinn- $\frac{1}{2}$  ja spinn- $\frac{3}{2}$  teooria tulemused vähe, kuid väikestel energiatel (alla  $\sim 150$  MeV) on hajumise mõjuristlõikel lähedased väärtused Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teooria tulemustega. Sarnaseid järelduse pakuvad ka graafikud joonisel 4.2, eksperimendis vaadeldud mõjuristlõige on  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas umbes paarkümmend korda suurem Diraci või RS teoorias ennustatust. Katseandmetega suurusjärgulisegi kooskõla saaks üksnes siis, kui kas  $\Delta^+$  barüoni mass oleks umbes 400 MeV või või footonite energia oleks umbes 10 GeV, kusjuures RS teooria pakutud mõjuristlõike ennustus kasvab kui  $\mathcal{O}(\omega^3)$ , kuid ka sel juhul oleks kooskõla eksperimendiga võrdlemisi tinglik ja ei kirjeldaks kogu mõõtepiirkonda. Teooria ennustused on eksperimendiga vastuolus.

Siit järeldub otseteed, et komposiitsed  $\Delta$ -barüonid ei ole elementaarsete Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste iseloomuga. Rarita-Schwingeri teoorias on omaette probleemid (lühidalt peatükis 5), kuid jättes need kõrvale, on siiski kahtluse all elementaarosakeste teooria rakendatavus komposiitosakestele. Väikeste energiatega juures langesid spinn- $\frac{1}{2}$  teooria ennustused võrdlemisi hästi kokku eksperimendiandmetega, mis lubab võimaluse, et RS teooria võib sobida väikeste energiatega korral spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste efektiivseks teooriaks. Peatükis 3 on aga märgitud, et väikeseenergialine piirjuht ei erine spinn- $\frac{1}{2}$  teooria omast. Rarita-Schwingeri teooria pakub olulisi erinevusi ainult kõrgemate energiatega juure, mistõttu teooria rakendatavuse jaoks pakutud energiavahemiku vähendamine ei ole mõistlik. Suuremate energiatega korral on kahtlust äratav nii RS teooria kui terviku õigsus kui ka tema rakendatavus komposiitosakestele, sest praegu vaadatud katsed vihjavad sisemise struktuuri olulisusele ning kõrvalejätmatusele, vähemalt  $\Delta^+$ -barüonide jaoks. Siiski efektiivses pildis, kui on arvestatud sisemise struktuuri (kvantkromodünaamika) ja teiste mõjudega, on Rarita-Schwingeri teooriat juba edukalt kasutatud prootonite Comptoni hajumise kirjeldamisel [46, 48, 50].



Joonis 4.2: Protonite Comptoni hajumise mõjuristlõike sõltuvus hajumisnurgast eksperimentides ning Diraci ja Rarita-Schwingeri teoorias.



## 5. Vastuolud Rarita-Schwingeri teoorias

Rarita-Schwingeri teooria ei ole täiesti sisemiselt kooskõlaline. Vaatamata kõrgema spinni teooria moodustamise lihtsusele Rarita-Schwingeri meetodil, on teoorias probleeme nii klassikalisel juhul kui ka kvantvälja tasemel. Nähtavalt tulevad probleemid esile interakteeruva välja jaoks. Käesolevas peatükis antaksegi ülevaade interakteeruva Rarita-Schwingeri teooria tuntuimatest probleemidest: Velo-Zwanzigeri probleemist (kausaalsuse kadu, klassikalne väli) ja Johnson-Sudarshani probleemist (probleemid antikommutatsiooniseostega, kvantväli).

### 5.1 Velo-Zwanzigeri probleem

Velo-Zwanzigeri probleem [57] seisneb superluminaalsete lainete tekkes minimaalselt interakteeruva Rarita-Schwingeri teooria jaoks klassikalise välja tasemel. Selleks viisid Velo ja Zwanziger RS põhivõrrandi hüperboolsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemi kujule ning määrasid lainefrondid.

Alustades Velo ja Zwanzigeri meetodil lagranžiaanist

$$\bar{\Psi}^{\mu}[(\Gamma \cdot \pi)_{\mu\nu} - B_{\mu\nu}]\Psi^{\mu}, \quad (5.1.1)$$

kus

$$(\Gamma \cdot \pi)_{\mu\nu} = \gamma^5 \epsilon_{\mu\rho\sigma\nu} \gamma^{\rho} \pi^{\sigma}, \quad (5.1.2a)$$

$$B_{\mu\nu} = m(g_{\mu\nu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}), \quad (5.1.2b)$$

võib tuletada liikumisvõrrandid

$$\begin{aligned} (\Gamma \cdot \pi - B)_{\mu\nu} \Psi^{\nu} &= 0, \\ \bar{\Psi}^{\mu} (\Gamma \cdot \pi - B)_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Kuna vektorspiinoritel on rohkem komponente, kui on tarvis spinn- $\frac{3}{2}$  kirjeldamiseks, siis osa võrranditest osutuvad kitsendusteks (*constraints*), s.o ei sisalda ajalisi tuletisi. Velo ja Zwanziger tuletavad neist kaks kitsendustingimuste võrrandit ja konstrueerisid uued liikumisvõrrandid (siin kasutatud artikli algset tähistust, sh kokkuleppeid  $c = \hbar = 1$ ,  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ,  $(\gamma^5)^2 = -1$ )

hermiitilisel kujul

$$\begin{aligned}
& (\gamma \cdot \pi - m)\Psi_\mu + (\pi_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu)\frac{2}{3}iem^{-2}\gamma^5\gamma \cdot F^d \cdot \Psi \\
& + \frac{2}{3}iem^{-2}F_\mu{}^d \cdot \gamma\gamma^5(\pi + \frac{1}{2}m\gamma) \cdot \psi + \\
& + \frac{2}{3}iem^{-2}F_\mu{}^d \cdot \gamma\gamma^5(\gamma \cdot \pi + 2m)\frac{2}{3}iem^{-2}\gamma^5\gamma \cdot F^d \cdot \Psi = 0,
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

kus  $F^d = F_\mu{}^\nu = \frac{1}{2}\epsilon_\mu{}^{\nu\rho}F_\rho{}^\sigma$  ja  $F_{\mu\nu}$  on elektromagnetvälja tugevuse tensor. Tegu on hüperboolsete võrrandite süsteemiga, kus ei ole küll sama palju teavet kui esialgsetes RS võrrandites, sest ei järeldu kitsendustingimused, kuid on tegu liikumisvõrrandiga, sest kitsendused säilivad ja samuti kui (5.1.4) lahend rahuldab kitsendusi, siis ta rahuldab ka esialgseid RS liikumisvõrrandeid (5.1.3). Lõpuks veel (5.1.4) seob välja tema ajalise tuletisega.

Hüperboolse võrrandite süsteemi jaoks võib defineerida karakteristiklikud pinnad [58] lk 590, 596. Velo ja Zwanziger vaatavad kaht juhtu sõltuvalt elektromagnetvälja tugevusest. Nii-nimetatud tugeva välja juhul  $(\frac{2}{3}em^{-2})^2 \mathbf{B}^2 \geq 1$  ei ole võrrandid (5.1.4) enam hüperboolsed ning nõrga välja korral osutub, et karakteristiklikud pinnad ei puutu valguskoonust ja ruumisarnased karakteristiklikud pinnad läbivad mistahes punkti, kus  $F_{\mu\nu}$  ei ole kaduvväike. See on Velo ja Zwanzigeri algartikli ideekäik ning siit järledub, et signaalid saavad levida valgusest kiiremini. Veel võib [57] järgi öelda, et RS teooria lainete levik sarnaneb anisotroopse keskkonnaga, kus on tavalised kiired ja ebatavalised kiired, mille levik antud juhul ületab valguse kiirust. See on aga relatiivsusteooria põhipostulaatidega vastuolus.

Praegu on esitatud Velo ja Zwanzigeri meetod superluminaalsete lainete olemasolu näitamiseks, kuid seda on kritiseeritud mitme põhjuse tõttu. [59] toob välja, et Velo ja Zwanziger kasutasid karakteristikute meetodit väljaspool varasemaid tõestusi ja RS võrrandi meetrika ei ole positiivselt määratud, kuid sümmeetriliste võrrandite olemasolu tõestustes on meetrika positiivsus oluline ja mistõttu lahendite olemasolu ei pruugi olla isegi üldsegi kindel. Rarita-Schwingeri teooria võrrandite lahendite olemasolu on siiski näidatud ning [59] näitab ilmutatult mittekauasaalsete lainete olemasolu 2 + 1 mõõtmega teoorias. Velo ja Zwanzigeri esialgne kitsenduste analüüs ei olnud täielik, täieliku analüüsi viis läbi [60], mis endiselt kinnitas mittekauasaalsete lainete olemasolu ning lisaks näitas Velo-Zwanzigeri probleemi seost vabadusastmete kaotamisega, mis on tingitud sekundaarse kitsenduse kõdumisest. Valgusest kiiremini levivate lainete olemasolu on tõestatud ka teistel viisidel [61–63], mistõttu superluminaalsete lainete teke on sügav probleem tavalises Rarita-Schwingeri teoorias.

## 5.2 Johnson-Sudarshani probleem

Johnson ja Sudarshan [64] tuletasid kitsendusepõhise analüüsi abil antikommutatsiooniseosed rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  väljale (siin  $\Psi_\mu^{3/2} = (\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\nu)\Psi_\nu$ ),

$$\{\Psi_\mu^{3/2}(x), \Psi_\mu^{3/2}(x)\} = \left(\delta_{\mu\sigma} + \frac{1}{3}\gamma_\mu\gamma_\sigma\right) \left(\delta_{\sigma\rho} + \frac{2}{3}\pi_\sigma\Delta\pi_\rho\right) \left(\delta_{\rho\nu} + \frac{1}{3}\gamma_\rho\gamma_\nu\right) \delta(x-y), \quad (5.2.1)$$

$$-\{\gamma_\mu\Psi^\mu(x), \gamma_\nu\Psi^\nu(y)\} = \frac{3}{2} \left[ \left(m + \frac{2}{3}\gamma \cdot \pi\right) \Delta \left(m - \frac{2}{3}\gamma \cdot \pi\right) - 1 \right] \delta(x-y), \quad (5.2.2)$$

kus (säilitades Johnsoni-Sudarshani kokkulepped)  $\Delta(m^2 - \frac{2}{3}eq\sigma \cdot H)^{-1}$ ,  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$  ja  $H$  on magnetvälja tugevus. Jätkates [64] järgi, võib öelda, et antikommutatsiooniseosed on lokaalse iseloomuga, samas kui osutub, et liikmetega  $\gamma_\mu\Psi^\mu$  ja  $\Psi_\mu^{3/2}$  seotud kitsendused on mittelokaalsed. Võib kohe öelda, et liikme  $\Delta(x)$  positiivsuse jaoks peab  $\frac{2}{3}|eH| < m^2$ . Antikommutatsiooniseoste kooskõlalisus sõltub sellest, kas paremal asuvad maatriksid on positiivselt määratud. Johnson ja Sudarshan näitavad, et etteantud välise välja korral saab leida taustsüsteemi, kus tingimust  $\frac{2}{3}|eH| < m^2$  rikutakse, ja Lorentzi kovariantsuse abil võib liikuda mõnda muusse taustsüsteemi. Seega ei ole antikommutatsiooniseosed interakteeruvast teoorias kooskõlalised.

Johnsoni ja Sudarshani tulemustele võib anda analoogilist kriitikat nagu Velo-Zwanzigeri tulemustele, nimelt kitsenduste analüüsi mittetäielikkuse osas. Hasumi *et al.* [65] viisid läbi täieliku kitsenduste analüüsi ning, jällegi alates teatud välise välja väärtustest, sekundaarsed kitsendused osutuvad kõdunuks ning põhjustavad vabadusastme kao. See on sarnane Velo-Zwanzigeri probleemiga ning tõepoolest vabadusastmete kadu peetakse kahe probleemi ühenduslülaks [66].

## 5.3 Muud probleemid ja võimalikud lahendused

Nii Velo-Zwanzigeri kui ka Johnsoni Sudarshani probleemid ilmneb vabadusastmete kaotamine teatud välja väärtuse juures ning [60, 66] tõepoolest seovad tuntud Rarita-Schwingeri vastuolud kokku: allikaks võib pidada kitsenduste struktuuri, mille tõttu operaator  $dc^\dagger$  ei ole pööratav (täpsem kirjeldus [66]). Vastuolud ei teki üksnes elektromagnetinteraktsiooni korral, näiteks skalaar- ja spinoorväljadega seotud massiivne spinn- $\frac{3}{2}$  väli käitub samuti mittekauusaalselt [67, 68] ja on kvantiseeritud juhul määramata antikommutatsiooniseostega [69].

Capri ja Shamaly [70] leidsid, et elektromagnetinteraktsioonis osalevad massiivsed spinn- $\frac{3}{2}$  väljadel on mittelokaalne ehitus, mida võib tõlgendada tähenduses, et spinn- $\frac{3}{2}$  väljad ei ole elementaarsed; mittelokaalsuse probleemi mainisid ka Johnson ja Sudarshan. Mittelokaalsuse küsimus viib ühe tõlgenduseni, et elementaarseid kõrgema spinniga osakesi ei saa olla ning tegu on komposiitosakestega. Teatud määral toetavad seda seisukohta katseandmed, sest seni pole elementaarseid kõrgema spinniga osakesi leitud, kuid tegu ei ole põhimõttelise kõrgema spinni võimalikkuse välistamisega.

Rarita-Schwingeri teooria vastuolusid on püütud lahendada erinevatel viisidel, siin esitatud variandid põhinevad allikatel [71, 72]. Üks viis, nagu juba mainitud, on elementaarsete spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste olemasolu ideest loobumine, tuginedes näiteks mittelokaalsusele või senistele eksperimentaalsetele andmetele (õigemini, nende puudumisele). Siiski see ei pruugi olla täiesti rahuldav, sest ilma põhimõtteliste tõketeta või keeluteooremideta ei ole võimalik absoluutse kindlusega välistada kõrgema spinniga osakeste olemasolu. Tuginedes spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste välistamisel mittelokaalsusele, jõutakse omakorda küsimuseni lokaalsetest väljadest ja osakeste elementaarsusest. Seega võib-olla fundamentaalseim küsimus on kõrgema spinniga osakeste olemasolu võimalikkuse küsimus, mitte vastuolude tekke põhjuse probleem, kuid sellele vastamine nõuab kas eksperimentaalseid fakte või teoreetilisi tulemusi<sup>1</sup>.

Vastupidine suund on püüd moodustada kooskõlaline kõrgema spinni teooria, piirdudes kasvõi spinn- $\frac{3}{2}$  juhuga. Selliste teooriate loomisel on katsetatud mitut varianti. Näiteks võib püüda lisada vabadusastmeid spinn- $\frac{3}{2}$  teooriasse, näitena võib tuua  $\mathcal{N} = 2$  laiendatud supergravitatsiooni [73], kus spinn- $\frac{3}{2}$  osakeste leviku kausaalsust toetab gravitatsiooniline vastumõju, kuid on tarvis Kaluza-Kleini seose kehtimine. Teine variant on näiteks lisada mitteminimaalseid kalibratsiooniinvariantseid liikmeid interaktsiooni, kasutada mitteminimaalset asendust.

Lõpetuseks tuleb veel öelda, et Rarita-Schwingeri teooria ei ole ainuke kõrgema spinni teooria või viis kõrgema spinni käsitlemiseks. Juba Rarita ja Schwingeri viitavad Fierzi ja Pauli teooriale [24], Velo ja Zwanziger nimetavad Rarita-Schwingeri lainefunktsioonide kõrvale veel [74, 75], mis on seotud Bargmann-Wigneri teooriaga [76] ning veel võib tuua välja [77, 78]. Põhjalikum ülevaade kõrgema spinni teooriast on antud näiteks artiklis [79] (mis kirjeldab ka enamlevinud probleeme) või õpikus [80]. Samas on mõne teise teooria kasutuselevõtu asemel võimalik ka Rarita-Schwingeri teooriat parandada. NKR formalismi [81] on juba mainitud [32] tulemuste osas, kuid võib mainida veel dünaamiliste vastasmõjude teooriat [82, 83].

On ilmne, et kõrgema spinni teooria osutub oluliselt keerulisemaks kui tuntud aine ja elementaarosakeste teooria ning vajab teoreetilist korrastamist, millele saaks kaasa aidata eksperimentaalne tugi, kui avastatakse sobivaid uusi osakesi. Senised tulemused juba vihjavad kõrgema spinniga osakeste eksootilistele omadustele, kuid selle tõepärasus vajab kinnitust, eriti kuna Rarita-Schwingeri teoorias on sisemised probleemid. Nende vastuolude täpne mõju praktilistele füüsikalistele tulemustele vajab uurimist, kuid seni on nad juba piisavad, et olla ettevaatlik tulemuste õigsuse hindamisel.

---

<sup>1</sup>Füüsikaliste teoreetiliste tulemuste rangus ja kehtivuspiirkond absoluutses mõttes on omaette küsimus ning skeptiline suhtumine ei pruugi alati olla sugugi mitte üleliigselt ettevaatlik.

# Kokkuvõte

Töös leiti Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria Comptoni hajumise kirjeldus, s.o diferentsiaalse mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga ja täismõjuristlõike jaotus üle algfootoni energia. Tulemused osutusid eksootiliseks, aga kooskõlaliseks varasemate uuringutega [32, 40]. Tulemuste funktsionaalsed kujud võeti kokku ja graafikud joonestati peatükis 3.

Rarita-Schwingeri teooria arvutused puu tasemel Feynmani diagrammide jaoks osutusid sarnaseks Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  teooria meetoditega. Lagranžiaanipõhise analüüsi järgi kirjutati Feynmani reeglite postuleerimiseks RS lagranžiaani tensori põhjal RS propagaator ja verteks, Feynmani diagrammide välistesse joontesse kirjutati väljasid kirjeldavad objektid (vektorspiinorid või polarisatsioonivektorid). Lisas E.2 esitati pikalt propagaatori avaldise tuletamisskeem, verteks loeti minimaalse asenduse teel saadud interaktsiooniliikmest välja. RS lagranžiaanis esineva parameetri  $A$  kõrvaldamiseks kontrolliti lagranžiaani invariantust tuntud punktteisenduste suhtes Delgado-Acosta ja Napsuciale [32] lagranžiaani faktoriseeritud kuju abil. Kamefuchi *et al.* ekvivalentsusteoreemi [31] tõttu on seega põhjendatud mistahes sobiva  $A$  väärtuse valimine, mis lihtsustas arvutustööd märgatavalt. Feynmani reeglid postuleeriti arvutusteks vajalikus ulatuses lagranžiaanipõhise analüüsi ja spinn- $\frac{1}{2}$  välja analoogia põhjal. Otsesed arvutused RS teoorias osutusid liiga keeruliseks ilmutatud arvutusteks, mistõttu need teostati sümbolarvutussüsteemis FORM.

Ilmnesid olulised erinevused Diraci spinn- $\frac{1}{2}$  ja Rarita-Schwingeri spinn- $\frac{3}{2}$  teooria Comptoni hajumise kirjelduse vahel. Kuigi põhilised arvutusmeetodid (Feynmani diagrammid, Diraci jälje tehnika) olid sarnased, siis Rarita-Schwingeri teoorias kasvas avaldise keerukus olulisel määral (spinn- $\frac{1}{2}$  teooria jälgavaldises kuni umbes 40 liiget, Rarita-Schwingeri teooria jälgavaldises umbes 23 000 000 liiget). Mõjuristlõike jaotuses kirjeldas erinevust üleminekutõenäosusega seotud liige, milles samuti väljendus keerukuse kasv. Diraci teooria mõjuristlõike jaotuse on võimalik viia kujule, kus ilmneb ainult suhe lõpp- ja algsagedustest  $\frac{\omega'}{\omega}$ , kuid RS teoorias esinevad need suhted kõrgemas astmes ning koos teistsuguste astmekombinatsioonidega nagu  $\omega\omega'^2$  jne.

Mõlemad teooriad andsid sama madalaenergialise Thomsoni piirjuhu, kuid kui Diraci teooria ennustab spinn- $\frac{1}{2}$  osakeste täismõjuristlõike vähenemist langeva footoni energia kasvades, siis Rarita-Schwingeri teooria ennustab spinn- $\frac{3}{2}$  osakestele täismõjuristlõike kasvu kiirusega  $\mathcal{O}(\omega^3)$ . See on anomaalne tulemus ja märgib hajumise suurenemist footoni energia kasvul. Sama

väljendus ka diferentsiaalse mõjuristlõike jaotuses: esialgu andsid mõlemad teooriad sarnase madalaenergialise käitumise, kus (laboratooriumi taustsüsteemis) tagasihajumine vähenes, kuid kui Kleini-Nishina valem ennustab  $\text{spinn-}\frac{1}{2}$  osakeste mõjuristlõike koondumist algse footoni liikumise suunas, siis Rarita-Schingeri teooria ennustab, et hajumine suureneb kõigis suundades alates teatud väärtusest, s.o tõkestamatult suureneb nii ette-, külgedele kui ka tahahajumine.

Rarita-Schwingeri teooria rakendamine prootonite Comptoni hajumisele  $\Delta^+$ -resonantsi piirkonnas ebaõnnestus katseandmetega kooskõla puudumise tõttu. Küsitav on nii RS teooria õigsus kui ka elementaarsete osakeste teooria rakendatavus komposiitosakestele. Madalaenergialise piirjuhu korral võib üldiselt olla kooskõla katseandmetega parem, kuid sel juhul ei eristu selgelt Rarita-Schwingeri teooria ennustuste omapära  $\text{spinn-}\frac{1}{2}$  teooriast.

Rarita-Schwingeri teooria tulemuste kehtimise korral on elementaarsed  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  osakesed elektromagnetinteraktsioonis eksootiliste omadustega. Kuna Rarita-Schwingeri teooria on sisemiste vastuoludega, siis ei ole õigsus kindel, olgugi et ta on näiteks kvalitatiivselt lähedane NKR formalismi Comptoni hajumise kirjeldusega [32]. Vaadati üle peamised ja tuntuimad vastuolud Rarita-Schwingeri teoorias, s.o Velo-Zwanzigeri (kausaalsuse kadu) ja Johnson-Sudarshani (antikommutatsiooniseoste mitte-positiivselt määratus) probleem. Neil probleemidel on ühine algus vabadusastmete kaos ning nad tuleb kõigi eelduste kohaselt täpsemast  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  (ja kõrgema spinni) teooriast kõrvaldada.

Sellega on sisse juhatud tee täpsemate kõrgema spinni teooriateni, mis võivad põhineda Rarita-Schwingeri teorial. Rarita-Schwingeri teooria saab olla baas, millest lähtuda kaasaegsete kõrgemate spinni teooriate tundma õppimisel, ja ta saab olla eri teooriate võrdluse lähtepunkt.

Töös jõuti uurimisprobleemi põhitulemusteni, kuid on võimalik jätkata analüüsi edasi. Praegu on arvutatud ainult puu tasemel diagrammid, kuid võib olla tarvis käsitleda ka kõrgemat järku parandeid (radiatsiooniparandeid). On võimalik, et kõrgemat järku parandid muudavad Rarita-Schwingeri teooria ennustusi  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  osakeste Comptoni hajumise jaoks, kuid varasemad tulemused ja häirusteooria olemus lubab arvata, et juba madalaimat järku häiritusteoorias on leitud peaosa hajumise kirjeldusest. Kõige olulisem töö arendus on Comptoni hajumise kirjeldamine teooriates, kus Rarita-Schwingeri teooria vastuolud on kõrvaldatud. Üks variant jätkuteooriaks on näiteks dünaamiliste vastasmõjude teooria [82, 83].

Elementaarseid  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  osakesi ei ole avastatud, kuid teooria juba võimaldab ennustada niisuguste osakeste potentsiaalset käitumist. Rarita-Schwingeri teooria ennustab eksootilist käitumist, mis on täiesti erinev seni tuntud Comptoni hajumisest. Teoreetiliste tulemuste olemasolul jääb järgmiste tulemuste väljatöötamise ja füüsikalise maailmakäsitluse süvendamise kõrvalt üle ainult oodata eksperimentaalseid andmeid, antud juhul elementaarsete  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  avastamist, kui see kunagi juhtub — senised tulemused aga pakuvad  $\text{spinn-}\frac{3}{2}$  osakestele välja väga unikaalsed omadused. On tarvis jätkata tööd, et kas välistada selliste osakeste olemasolu või vastupidi — avastada sellised ilmingud.

# Kasutatud kirjandus

- [1] A. H. Compton, “A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements,” *Physical Review* **21**, 483–502 (1923).
- [2] M.-T. Hütt *et al.*, “Compton scattering by nuclei,” *Physics Reports* **323**, 457–594 (2000).
- [3] O. Klein ja T. Nishina, “Über die Streuung von Strahlung durch freie Elektronen nach der neuen relativistischen Quantendynamik von Dirac,” *Zeitschrift für Physik* **52**, 853–868 (1929).
- [4] W. Bothe ja H. Geiger, “Ein Weg zur experimentellen Nachprüfung der Theorie von Bohr, Kramers und Slater,” *Zeitschrift für Physik* **26**, 440–441 (44 1924).
- [5] W. Bothe ja H. Geiger, “Experimentelles zur Theorie von Bohr, Kramers und Slater,” *Naturwissenschaften* **13**, 440–441 (20 1925).
- [6] A. H. Compton ja A. W. Simon, “Directed Quanta of Scattered X-Rays,” *Physical Review* **26**, 289–299 (3 1925).
- [7] Y. Rephaeli, S. Sadeh ja M. Shimon, “The Sunyaev Zeldovich effect,” *La Rivista del Nuovo Cimento* **29**, 1–18 (2006).
- [8] W. Heitler ja L. Nordheim, “Über die wahrscheinlichkeit von mehrfachprozessen bei sehr hohen energien,” *Physica* **1**, 1059–1072 (1934).
- [9] F. Mandl ja T. H. R. Skyrme, “The theory of the double Compton effect,” *Proceedings of the Royal Society A* **215**, 497–507 (1952).
- [10] R. J. Gould, “The cross section for double Compton scattering,” *The Astrophysical Journal* **285**, 275–278 (1984).
- [11] A. C. Tanner ja I. R. Epstein, “Multiple scattering in the Compton effect: Analytic treatment of angular distributions and total scattering probabilities,” *Physical Review A* **13**, 335–348 (1976); “Analytic and numerical treatment of energy profiles,” **14**, 313–327 (1976); “Monte Carlo calculations,” **14**, 328–340 (1976); “Operator formalism for nonstationary electrons,” **16**, 1146–1153 (1976).
- [12] M. J. Cooper *et al.*, “A short history of magnetic Compton scattering,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* **580**, 1–7 (2007).

- [13] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields: Foundations*, kd 1 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [14] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell* (Princeton University Press, Princeton, 2003).
- [15] R. Lias, *Rühmateooria Füüsikutele*, kd 1–4 (Tartu Riiklik Ülikool, Tartu, 1972–1976).
- [16] M. E. Peskin ja D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, Boulder, 1995).
- [17] P. A. M. Dirac, “The Quantum Theory of the Electron,” *Proceedings of the Royal Society of London A* **117**, 610–624 (1928).
- [18] J. D. Bjorken ja S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [19] F. Mandl ja G. Shaw, *Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1993).
- [20] S. Schweber, *QED and the Men Who Made It* (Princeton University Press, Princeton, 1994).
- [21] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics,” *Reviews of Modern Physics* **20**, 367–387 (1948).
- [22] Н. Боголюбов ja Д. В. Ширков, *Квантовые Поля* (Наука, Москва, 1980).
- [23] W. Rarita ja J. Schwinger, “On a Theory of Particles with Halg-Integral spin,” *Physical Review* **60**, 61 (1941).
- [24] M. Fierz ja W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field,” *Proceedings of the Royal Society A* **173**, 211–232 (1939).
- [25] R. Rahman, “Higher Spin Theory - Part I,” versioon 2, arXiv: 1307.3199 [hep-th] (2013).
- [26] M. D. Nykerk, *Quantizing Spin 3/2 Fields*, doktoritöö (Nationaal Instituut voor Kernfysica en Hoge Energiefysica, Amsterdam, 1994).
- [27] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations* (Springer, Berlin, 2000).
- [28] H. Haberzettl, “Propagation of a massive spin-3/2 particle,” versioon 2, arXiv: 9812043 [nucl-th] (1998).
- [29] A. E. Kaloshin ja V. P. Lomov, “The Rarita-Schwinger field: Renormalization and phenomenology,” *International Journal of Modern Physics A* **22**, 4495–4518 (2007).
- [30] L. M. Nath, B. Etemadi ja J. D. Kimel, “Uniqueness of the Interaction Involving Spin- $\frac{3}{2}$  Particles,” *Physical Review D* **3**, 2153–2161 (1971).
- [31] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh ja A. Salam, “Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories,” *Nuclear Physics* **28**, 529–549 (1961).



- [32] E. G. Delgado-Acosta ja M. Napsuciale, “Compton scattering off elementary spin  $\frac{3}{2}$  particles,” *Physical Review D* **80**, 054002 (2009).
- [33] H. M. Siahaan, *Spin-3/2 Field Theories and The Gauge Invariance*, magistrityö (Institut Teknologi Bandung, Bandung, 2008).
- [34] A. E. Kaloshin ja V. P. Lomov, “Propagator of the interacting Rarita-Schwinger field,” *Modern Physics Letters A* **19**, 135–142 (2004).
- [35] H. T. Williams, “Misconceptions regarding spin  $\frac{3}{2}$ ,” *Physical Review C* **31**, 2297–2299 (1985).
- [36] R. A. Adelseck, C. Bennhold ja L. E. Wright, “Kaon photoproduction operator for use in nuclear physics,” *Physical Review C* **32**, 1681–1692 (1985).
- [37] M. Benmerrouche, R. M. Davidson ja C. Mukopadhyay, “Problems of describing spin- $\frac{3}{2}$  baryon resonances in the effective Lagrangian theory,” *Physical Review C* **39**, 2339–2348 (1989).
- [38] K. G. Savvidy, “Quantum electrodynamics of spin 3/2,” versioo 1, arXiv: 1005.3455 [hep-th] (2010).
- [39] J. Kuipers *et al.*, “FORM version 4.0,” *Computer Physics Communications* **184**, 1453–1467 (2013).
- [40] K. Dormuth ja R. Teshima, “Spin- $\frac{3}{2}$  Compton Scattering,” *Lettere al Nuovo Cimento* **4**, 796–798 (1970).
- [41] K. Krajewska ja J. Z. Kamiński, “Frequency scaling law for nonlinear Compton and Thomson scattering: Relevance of spin and polarization effects,” *Physical Review A* **90**, 052117 (2014).
- [42] M. Froissart, “Asymptotic Behavior and Subtractions in the Mandelstam Representation,” *Physical Review* **123**, 1053–1057 (1961).
- [43] Y. I. Azimov, “How Robust is the Froissart bound?” *Physical Review D* **84**, 056012 (2011).
- [44] S. Donnachie *et al.*, *Pomeron Physics and QCD* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [45] S. Kusaka, “ $\beta$ -Decay with Neutrino of Spin  $\frac{3}{2}$ ,” *Physical Review* **60**, 61–62 (1941).
- [46] Y. Zhang ja K. Savvidy, “Proton Compton scattering in a unified proton- $\Delta^+$  model,” *Physical Review C* **88**, 064614 (2013).
- [47] Л. В. Курносова, “Рассеяние фотонов различных энергий на электронах,” *Успехи Физических Наук* **52**, 603–649 (1954).
- [48] V. Pascalutsa ja D. R. Phillips, “Effective theory of the  $\Delta(1232)$  resonance in Compton scattering off the nucleon,” *Physical Review C* **67**, 055202 (2003).

- [49] V. Lensky *et al.*, “Proton Compton scattering cross section in different variants of chiral effective field theory,” *Physical Review C* **86**, 048201 (2012).
- [50] J. A. McGovern, D. R. Phillips ja H. W. Griebhammer, “Compton scattering from the proton in an effective field theory with explicit Delta degrees of freedom,” *European Physical Journal A* **49**, 12 (2013).
- [51] J. Beringer *et al.*, “Review of Particle Physics,” *Physical Review D* **86**, 010001 (2012).
- [52] B. E. MacGibbon *et al.*, “Measurement of the electric and magnetic polarizabilities of the proton,” *Physical Review C* **52**, 2097–2109 (1995).
- [53] V. O. de León *et al.*, “Low-energy Compton scattering and the polarizabilities of the proton,” *European Physical Journal A* **10**, 207–215 (2001).
- [54] E. L. Hallin *et al.*, “Compton scattering from the proton,” *Physical Review C* **48**, 1497–1507 (1993).
- [55] G. Blanpied *et al.*, “ $N \rightarrow \Delta$  transition and proton polarizabilities from measurements of  $p(\vec{\gamma}, \gamma)$ ,  $p(\vec{\gamma}, \pi^0)$  and  $p(\vec{\gamma}, \pi^+)$ ,” *Physical Review C* **64**, 025203 (2001).
- [56] S. Wolf *et al.*, “Compton scattering by the proton using a large-acceptance arrangement,” *European Physical Journal A* **12**, 231–252 (2001).
- [57] G. Velo ja D. Zwanziger, “Propagation and Quantization of Rarita-Schwinger Waves in an External Electromagnetic Potential,” *Physical Review* **186**, 1337–1341 (1969).
- [58] R. Courant ja D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Wiley-Interscience, New York, 1962).
- [59] M. Hortaçsu, “Demonstration of noncausality for the Rarita-Schwinger equation,” *Physical Review D* **9**, 928–930 (1974).
- [60] W. Cox, “On the Lagrangian and Hamiltonian constraint algorithms for the Rarita-Schwinger field coupled to an external electromagnetic field,” *Journal of Physics A* **22**, 1599–1608 (1989).
- [61] A. Shamaly ja A. Z. Capri, “Propagation of interacting fields,” *Annals of Physics* **74**, 502–523 (1972).
- [62] A. Shamaly ja A. Z. Capri, “Propagation of Nonlinear Electromagnetic Field Theories,” *Canadian Journal of Physics* **52**, 917–918 (1974).
- [63] A. Z. Capri ja R. L. Kobes, “Further problems in spin-3/2 field theories,” *Physical Review D* **22**, 1967–1978 (1980).
- [64] K. Johnson ja E. C. G. Sudarshan, “Inconsistency of the Local Field Theory of Charged Spin 3/2 Particles,” *Annals of Physics* **13**, 126–145 (1961).

- [65] A. Hasumi, R. Endo ja T. Kimura, “Dirac quantisation of a massive spin-3/2 particle coupled with a magnetic field,” *Journal of Physics A* **12**, L217–L221 (1979).
- [66] M. Kobayashi ja Y. Takahashi, “The Rarita-Schwinger paradoxes,” *Journal of Physics A* **20**, 6581–6589 (1987).
- [67] W. Tait, “Causality in the  $\pi N\Delta$  interaction,” *Lettere al Nuovo Cimento* **7**, 368–370 (1973).
- [68] L. P. S. Singh, “Noncausal Propagation of Classical Rarita-Schwinger Waves,” *Physical Review D* **7**, 1256–1258 (1973).
- [69] C. R. Hagen, “New Inconsistencies in the Quantization of Spin- $\frac{3}{2}$  Fields,” *Physical Review D* **4**, 2204–2208 (1971).
- [70] A. Shamaly ja A. Z. Capri, “On the connection between acausal propagation and the non-local structure of higher spin fields,” *Canadian Journal of Physics* **54**, 1089–1093 (1976).
- [71] H. S. Green, “Quantum Electrodynamics of Particles with Arbitrary Spin,” *Australian Journal of Physics* **31**, 219–232 (1978).
- [72] M. Porrati ja R. Rahman, “Causal propagation of a charged spin 3/2 field in an external electromagnetic background,” *Physical Review D* **80**, 025009 (2009).
- [73] S. Ferrara ja P. van Nieuwenhuizen, “Consistent Supergravity with Complex Spin- $\frac{3}{2}$  Gauge Fields,” *Physical Review Letters* **37**, 1669–1671 (1976).
- [74] G. S. Guralnik ja T. W. B. Kibble, “Lagrangian Formulation of  $\bar{U}(12)$  Symmetry and the Bargmann-Wigner Equations,” *Physical Review* **139B**, 712–719 (1965); **150**, 1406 (1966).
- [75] S. N. Gupta ja W. W. Repko, “Electromagnetic Interaction of the Bargmann-Wigner Fields,” *Physical Review* **165B**, 1415–1419 (1968).
- [76] V. Bargmann ja E. P. Wigner, “Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations,” *Proceedings of the National Academy of Sciences* **34**, 211–223 (1948).
- [77] H. Joos, “Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik,” *Fortschritte der Physik* **10**, 65–146 (1962).
- [78] S. Weinberg, “Feynman Rules for Any Spin,” *Physical Review* **133**, B1318–B1332 (1964).
- [79] M. Kirchbach ja V. M. B. Guzmán, “Problems and Progress in Covariant High Spin Description,” *Journal of Physics* **761**, 012079 (2016).
- [80] A. O. Barut ja R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications: Wave Equations* (World Scientific, Singapore, 1986).
- [81] M. Napsuciale, M. Kirchbach ja S. Rodriguez, “Spin- $\frac{3}{2}$  beyond the Rarita-Schwinger framework,” *European Physical Journal A* **29**, 289–306 (2006).

- [82] R. Saar *et al.*, ““Dynamical” interactions and gauge invariance,” *Physical Review D* **84**, 065022 (2011).
- [83] R. Saar *et al.*, “Gauge and Lorentz Transformation Placed on the Same Foundation,” *Advances in Mathematical Physics* **2011**, 652126 (2011).

# Lisad

## A. Kokkulepped

Kasutusel on Minkowski meetrika

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.1})$$

Gamma maatriksid on Diraci esituses,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

kus  $N$ -järku ühikmaatriks on  $\mathbb{1}_N$  ja Pauli maatriksid

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Üldjuhul on jäetud ühikmaatriks välja kirjutamata. Tema olemasolu määratakse ümbritsevate liikmete põhjal, et tehted oleksid lubatud.

Nelivektorid on esitatud tavalises kirjas, kolmvektorid paksus kirjas. Vektorite skalaarkorrutised on esitatud korrutamistäpiga,

$$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu = a \cdot b. \quad (\text{A.4})$$

Kõikjal, kui ei ole teisiti märgitud, on kasutatud Einsteini summeerimiskokkulepet kahes tähenduses:

$$a^\mu b_\mu = \sum_{\mu=0}^3 a^\mu b_\mu, \quad A_i B_i = \sum_i A_i B_i. \quad (\text{A.5})$$

Kreeka tähtedega tähistatakse summeerimist üle kõigi aegruumi koordinaatide, indeksid 0 kuni 3, ladina tähtedega ainult üle ruumikoordinaate, indeksid 1 kuni 3. Summeerimine üle korduvate alaindeksite (teine juht) väljendab maatrikskorrutamist ning siis on mõeldud, et summeerimisrajad on maatriksite mõõtmete järgi määratud.

## B. Jälgede arvutusvalemid

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0, \quad (\text{B.3})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}), \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \quad \text{kui } n \text{ on paaritu}, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0, \quad \text{kui } n \text{ on paaritu}, \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) &= g^{\mu_1 \mu_2} \text{Tr}(\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_n}) - g^{\mu_1 \mu_3} \text{Tr}(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_n}) + \\ &+ g^{\mu_1 \mu_4} \text{Tr}(\gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_n}) \mp \dots + \gamma^{\mu_1 \mu_n} \text{Tr}(\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{n-1}}), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$4 \text{Tr}(\Gamma^{(n)} \gamma_5) = \sum_{\{\mu_i\}} (-1)^{\{\mu_i\}} \text{Tr}(\Gamma^{(n)}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}) \text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma_5), \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Tr}(\mathbb{1}_4) = 4. \quad (\text{B.11})$$

## C. Spinn- $\frac{1}{2}$ teooria jälgede arvutamine

### C.1 Jälgavaldis $|\overline{\mathcal{M}_1}|^2$ jaoks

Avaldises (1.4.3) võib jälje

$$\text{Tr}(\dots) = \text{Tr}[(\not{p} + \hbar \not{k} + mc)\gamma_\mu(\not{p} + mc)\gamma^\mu(\not{p}' + \hbar \not{k} + mc)\gamma_\nu(\not{p}' + mc)\gamma^\nu] \quad (\text{C.1.1})$$

arvutada ilmutatult kõik sulud avades. Sel juhul (jättes alles ainult jäljed, mis ei taandu)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dots) &= \text{Tr}((\not{p} + \hbar \not{k} + mc)(-2\not{p} + 4mc)(\not{p} + \hbar \not{k} + mc)(-2\not{p}' + 4mc)) = \\ &= 4\text{Tr}((- \not{p}\not{p} + \not{p}mc - \not{k}\not{p}\hbar + 2\hbar mc\hbar + 2m^2c^2) \\ &\quad (- \not{p}'\not{p}' + 2\hbar mc - \not{k}\not{p}'\hbar + 2\hbar mc\hbar - \not{p}'mc + 2m^2c^2)) = \\ &= 4\text{Tr}(\not{p}\not{p}\not{p}'\not{p}' + \not{p}\not{p}\not{k}\not{p}'\hbar - 3\not{p}\not{p}'m^2c^2 + \hbar\not{p}\not{p}\not{p}'\hbar + \hbar\not{p}\not{k}\not{p}'\hbar^2 + 4\hbar\not{p}m^2c^2\hbar + 4\hbar\not{k}m^2c^2\hbar^2 - \\ &\quad - 4\hbar\not{p}'m^2c^2\hbar + 4m^4c^4). \end{aligned}$$

Arvutada tuleb üksnes neli mitteilmset jälge. Antud juhul

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\not{p}\not{p}\not{p}'\not{p}') &= 4p_\mu p_\nu p_\rho p'_\sigma (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) = \\ &= 4[(p \cdot p)(p \cdot p') - (p \cdot p)(p \cdot p') + (p \cdot p)(p \cdot p')] = 4m^2c^2p \cdot p', \\ \text{Tr}(\not{p}\not{p}\not{k}\not{p}') &= 4[(p \cdot p)(p' \cdot k) - (p \cdot k)(p \cdot p') + (p \cdot k)(p \cdot p')] = 4m^2c^2p' \cdot k, \\ \text{Tr}(\not{k}\not{p}\not{p}'\not{p}') &= 4[(p \cdot k)(p \cdot p') - (p \cdot k)(p \cdot p') + (p \cdot p)(p' \cdot k)] = 4m^2c^2p' \cdot k, \\ \text{Tr}(\not{k}\not{p}\not{k}\not{p}') &= 4[(p \cdot k)(p' \cdot k) - (k \cdot k)(p' \cdot p) + (p \cdot k)(p' \cdot k)] = 8(p \cdot k)(p' \cdot k). \end{aligned}$$

Asendades tulemused sisse, saab üleminekutõenäosuseks

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}_1}|^2 &= \frac{64\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)^2} (m^2c^2p \cdot p' + m^2c^2\hbar p' \cdot k - 3m^2c^2p \cdot p' + m^2c^2\hbar p' \cdot k + \\ &\quad + 2\hbar^2(p \cdot k)(p' \cdot k) + 4m^2c^2\hbar p \cdot k - 4m^2c^2\hbar p' \cdot k + 4m^4c^4) = \\ &= \frac{64\pi^2\alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)^2} [4m^4c^4 - 2m^2c^2p \cdot p' + 4m^2c^2\hbar p \cdot k - 2m^2c^2\hbar p' \cdot k + 2\hbar^2(p \cdot k)(p' \cdot k)]. \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

## C.2 Jälgavaldis $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2}$ jaoks

Üleminekuamplituudide kombinatsiooni  $\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2}$  jaoks on tarvis arvutada jälg

$$\text{Tr}(\dots) = \text{Tr}[\gamma^\mu(\not{p} + \hbar \not{k} + mc)\gamma^\nu(\not{p}' + mc)\gamma_\mu(\not{p} - \hbar \not{k}' + mc)\gamma_\nu(\not{p} + mc)]. \quad (\text{C.2.1})$$

Vajalikud on gammamaatriksite seosed

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}, \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \quad (\text{C.2.2})$$

Avades kõik sulud on jälgavaldis

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\dots) &= \text{Tr}(\gamma^\mu(\not{p} + \hbar \not{k} + mc)\gamma^\nu(\not{p}' + mc)\gamma_\mu(\not{p} - \hbar \not{k}' + mc)\gamma_\nu(\not{p} + mc)) = \\ &= \text{Tr}((\gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \not{p}' \gamma_\mu + \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \gamma_\mu mc + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{p}' \gamma_\mu \hbar + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \gamma_\mu mc \hbar + \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p}' \gamma_\mu mc + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu m^2 c^2) \\ &\quad (\not{p} \gamma_\nu \not{p} + \not{p} \gamma_\nu mc - \not{k}' \gamma_\nu \not{p} \hbar - \not{k}' \gamma_\nu mc \hbar + \gamma_\nu \not{p} mc + \gamma_\nu m^2 c^2)) = \\ &= \text{Tr}((-2\not{p}' \gamma^\nu \not{p} + 4p^\nu mc - 2\not{p}' \gamma^\nu \not{k} \hbar + 4k^\nu mc \hbar + 4p^\nu mc - 2\gamma^\nu m^2 c^2) \\ &\quad (\not{p} \gamma_\nu \not{p} + \not{p} \gamma_\nu mc - \not{k}' \gamma_\nu \not{p} \hbar - \not{k}' \gamma_\nu mc \hbar + \gamma_\nu \not{p} mc + \gamma_\nu m^2 c^2)) = \\ &= \text{Tr}(\cancel{-8\not{p}' \not{p} m^2 c^2} \quad \cancel{-8\not{p}' m^3 c^3} \quad + 8\not{p}' \not{p} (p \cdot k') \hbar \quad \cancel{+8\not{p}' (p - k') mc \hbar} \quad \cancel{+4\not{p}' \not{p} mc} \quad \cancel{+4\not{p}' \not{p} m^2 c^2} \\ &\quad \cancel{+4\not{p} \not{p} mc} \quad + 4\not{p} \not{p} m^2 c^2 \quad \cancel{-4\not{k}' \not{p} mc \hbar} \quad - 4\not{k}' \not{p} m^2 c^2 \hbar \quad + 4\not{p} \not{p} m^2 c^2 \quad \cancel{+4\not{p} m^3 c^3} \\ &\quad - 8\not{p}' \not{p} (p \cdot k) \hbar \quad \cancel{-8\not{p}' (p - k) mc \hbar} \quad + 8\not{p}' \not{p} (k' \cdot k) \hbar^2 \quad \cancel{+8\not{p}' (k' - k) mc \hbar^2} \quad \cancel{+4\not{p}' \not{k} mc \hbar} \quad + 4\not{p}' \not{k} m^2 c^2 \hbar \\ &\quad \cancel{+4\not{p} \not{k} mc \hbar} \quad + 4\not{p} \not{k} m^2 c^2 \hbar \quad \cancel{-4\not{k}' \not{k} mc \hbar^2} \quad - 4\not{k}' \not{k} m^2 c^2 \hbar^2 \quad + 4\not{k} \not{p} m^2 c^2 \hbar \quad \cancel{+4\not{k} m^3 c^3 \hbar} \\ &\quad \cancel{+4\not{p} \not{p}' mc} \quad \cancel{+4\not{p} \not{p}' m^2 c^2} \quad \cancel{-4\not{k}' \not{p}' mc \hbar} \quad - 4\not{k}' \not{p}' m^2 c^2 \hbar \quad + 4\not{p}' \not{p} m^2 c^2 \quad \cancel{+4\not{p}' m^3 c^3} \\ &\quad + 4\not{p} \not{p} m^2 c^2 \quad \cancel{+4\not{p} m^3 c^3} \quad - 4\not{k}' \not{p} m^2 c^2 \hbar \quad \cancel{-4\not{k}' m^3 c^3 \hbar} \quad \cancel{-8\not{p} m^3 c^3} \quad - 8m^4 c^4) = \\ &= 32(p' \cdot p)(p \cdot k') \hbar - 32(p \cdot k') m^2 c^2 \hbar - 32(p' \cdot p)(p \cdot k) \hbar + 32(p' \cdot p)(k' \cdot k) \hbar^2 + 16(p' \cdot k) m^2 c^2 \hbar + 32(p \cdot k) m^2 c^2 \hbar - \\ &\quad - 16(k' \cdot k) m^2 c^2 \hbar^2 - 16(p' \cdot k') m^2 c^2 \hbar + 16(p' \cdot p) m^2 c^2 + 16m^4 c^4 = \\ &= 32(p' \cdot p)(p \cdot k') \hbar - 16(p \cdot k') m^2 c^2 \hbar - 32(p' \cdot p)(p \cdot k) \hbar + 32(p' \cdot p)(k' \cdot k) \hbar^2 + 16(p \cdot k) m^2 c^2 \hbar - \\ &\quad - 16(p' \cdot p) m^2 c^2 + 16m^4 c^4 + 16(p' \cdot p) m^2 c^2 + 16m^4 c^4 = \\ &= 32(p' \cdot p)(p \cdot (k' - k)) \hbar + 32(p' \cdot p)(p \cdot k) \hbar - 32(p' \cdot p)(p' \cdot k) \hbar - 16(p \cdot k') m^2 c^2 \hbar + 16(p \cdot k) m^2 c^2 \hbar + 32m^4 c^4 = \\ &= 32(p' \cdot p)(p \cdot (k' - k)) \hbar - 32(p' \cdot p)(p \cdot (k' - k)) \hbar^2 - 16(p \cdot k') m^2 c^2 \hbar + 16(p \cdot k) m^2 c^2 \hbar + 32m^4 c^4 = \\ &= 32m^4 c^4 - 16(p \cdot k') m^2 c^2 \hbar + 16(p \cdot k) m^2 c^2 \hbar. \end{aligned}$$

Seega tulemus on

$$\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = \overline{\mathcal{M}_2^* \mathcal{M}_1} = \frac{64\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)(p \cdot k')} (-2m^4 c^4 + m^2 c^2 \hbar p \cdot k' - m^2 c^2 \hbar p \cdot k). \quad (\text{C.2.3})$$



## D. Faasiruumi integreerimine

Kahe osakesega lõppseisundis on faasiruumielement

$$dPS_2 = \left( \prod_{f=1}^2 \frac{d^3 p_f}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{p}_f)} \right) (2\pi\hbar)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum p_f), \quad (D.1)$$

Siin  $p_1 = p'$  ja  $p_2 = \hbar k'$ . Cauchy teoreemi abil

$$\frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{p}')} = \frac{d^4 p'}{(2\pi\hbar)^4} (2\pi\hbar) c \delta(p'^2 - m^2 c^2). \quad (D.2)$$

Selle asendamisel faasiruumi saab

$$dPS_2 = \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{2E(\mathbf{k}')} d^4 p' (2\pi\hbar) c \delta(p'^2 - m^2 c^2) \delta^{(4)}(p + \hbar k - p' - \hbar k'). \quad (D.3)$$

Integreerimisel  $d^4 p'$  järgi, on

$$dPS_2 = \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{2\hbar |\mathbf{k}'|} (2\pi\hbar) \delta((p + \hbar k - \hbar k')^2 - m^2 c^2), \quad (D.4)$$

kus veel  $E(\mathbf{k}') = \hbar |\mathbf{k}'| c$  ja  $p' = p + \hbar k - \hbar k'$ .

Kolmemõõtmelise integreerimise jaoks tuleb minna üle polaarkoordinaatidele

$$d^3 k' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\phi d\cos(\theta). \quad (D.5)$$

Samal ajal Diraci deltafunktsionaali argument on

$$\begin{aligned} (p + \hbar k - \hbar k')^2 - m^2 c^2 &= (p, p) + \hbar^2 k \cdot k + \hbar^2 k' \cdot k' + 2\hbar p \cdot k - 2\hbar p \cdot k' - 2\hbar^2 k \cdot k' - m^2 c^2 = \\ &= 2\hbar p \cdot k - 2\hbar p \cdot k' - 2\hbar^2 k \cdot k' = \\ &= 2\hbar(mc|\mathbf{k}| - \mathbf{0} \cdot \mathbf{k} - mc|\mathbf{k}'| + \mathbf{0} \cdot \mathbf{k}') - 2\hbar^2(|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos(\theta)) = \\ &= 2mc\hbar(|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'|) - 2\hbar^2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(1 - \cos(\theta)), \end{aligned} \quad (D.6)$$

kus on kasutatud tuntud seoseid (1.4.5) ja nelivektorite skalaarkorrutised on kirjutatud pikalt lahti, s.o kui  $a^\mu = (a_0, \mathbf{a})$ ,  $b^\mu = (b_0, \mathbf{b})$ , siis  $(a, b) = a^\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ . Kolmvektorite skalaarkorrutis on  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\theta)$ . Lainevektori kontravariantsed komponendid ise  $k^\mu = (|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$ ,  $k'^\mu = (|\mathbf{k}'|, \mathbf{k}')$ , neliimpulsi jaoks on  $p^\mu = (mc, \mathbf{0})$ . Seega

$$dPS_2 = \frac{|\mathbf{k}'| d|\mathbf{k}'| d\phi d\cos(\theta)}{(2\pi)^3} \frac{c^2}{2\hbar} (2\pi\hbar) \delta(2mc\hbar(|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'|) - 2\hbar^2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(1 - \cos(\theta))). \quad (D.7)$$

Edasi saab faasiruumist eemaldada kas  $\cos(\theta)$  või  $|\mathbf{k}'|$ , mis oleneb sellest, kas parajasti mõõdetakse footonite lainepikkust või suunda peale hajumist.

Lainepikkuse mõõtmisel eemaldatakse  $\cos(\theta)$ . Deltafunktsionaali argumendiks võib kirjutada funktsiooni  $f_1(\cos(\theta))$ . Üldjuhul kehtib

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i) = \frac{1}{|f'(x)|} \sum_i \delta(x - x_i), \quad (\text{D.8})$$

kus  $x_i$  on  $f(x)$  nullkohad. Praegu on nullkohad

$$\cos(\theta) = 1 - mc \left( \frac{1}{\hbar|\mathbf{k}'|} - \frac{1}{\hbar|\mathbf{k}|} \right). \quad (\text{D.9})$$

Muuhulgas on see Comptoni valemi  $\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{mc}(1 - \cos(\theta))$  teine kuju. Seega kasutades deltafunktsiooni omadust (D.8)

$$\delta(f_1(\cos(\theta))) = \frac{1}{2\hbar^2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} \delta \left( \cos(\theta) - 1 + mc \left( \frac{1}{\hbar|\mathbf{k}'|} - \frac{1}{\hbar|\mathbf{k}|} \right) \right). \quad (\text{D.10})$$

Sel juhul deltadistributsiooni abil integreerides üle  $\cos(\theta)$  ja  $\phi$  saab

$$dPS_2 = \frac{d|\mathbf{k}'|}{(2\pi)^2} \frac{c^2}{2\hbar} \frac{2\pi\hbar}{2\hbar^2|\mathbf{k}|}. \quad (\text{D.11})$$

Integreerimine üle vaatlemata nurga  $\phi$  andis lisateguri  $2\pi$ . Seega jaotus  $|\mathbf{k}'|$  järgi on

$$\frac{dPS_2}{d|\mathbf{k}'|} = \frac{c^2}{8\pi\hbar^2|\mathbf{k}|}. \quad (\text{D.12})$$

Polaarnurga mõõtmisel eemaldatakse  $|\mathbf{k}'|$ . Sel juhul tuleb kirjutada deltafunktsionaali argumendiks  $f_2(|\mathbf{k}'|)$ , mis on (valemi (D.8) põhjal)

$$\delta(f_2(|\mathbf{k}'|)) = \frac{1}{2mc\hbar + 2\hbar^2|\mathbf{k}|(1 - \cos(\theta))} \delta \left( |\mathbf{k}'| - \frac{mc|\mathbf{k}|}{mc + \hbar|\mathbf{k}|(1 - \cos(\theta))} \right) \quad (\text{D.13})$$

ning analoogiliselt saame peale lihtsustamist

$$\frac{dPS_2}{d\cos(\theta)} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{mc|\mathbf{k}|}{2\hbar(mc + \hbar|\mathbf{k}|(1 - \cos(\theta)))^2}. \quad (\text{D.14})$$

Tihti antakse mõjuristlõike jaotus üle ruuminurga. Sel juhul tuleb jätta üle asimuutnurga integreerimata, s.o

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d\cos\theta}. \quad (\text{D.15})$$

Erinevus on üksnes konstantses kordajas.

# E. Rarita-Schwingeri teooria

## tuletuskäigud

### E.1 Lagranžiaani invariantisus

Lagranžiaani võib anda faktoriseeritud kujul

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\Psi}^\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}(p, A)\Psi^\nu, \quad (\text{E.1.1})$$

kus

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}(p, A) = p_\alpha T_{\mu}{}^\alpha{}_\nu(A) - mcB_{\mu\nu}(A), \quad (\text{E.1.2a})$$

$$T_{\mu\alpha\nu}(A) = g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + A(\gamma_\mu g_{\alpha\nu} + g_{\mu\alpha}\gamma_\nu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu, \quad (\text{E.1.2b})$$

$$B_{\mu\nu}(A) = g_{\mu\nu} - (3A^2 + 3A + 1)\gamma_\mu\gamma_\nu. \quad (\text{E.1.2c})$$

Esituse (E.1.1) kehtimine on ilmne, näidatav otsese asenduse teel. Invariantisuse näitamiseks on kasulikum faktoriseering

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\Psi}^\mu R_{\mu\rho}\left(\frac{A}{2}\right)\mathcal{K}^{\rho\sigma}(p, 0)R_{\sigma\nu}\left(\frac{A}{2}\right)\Psi^\nu \quad (\text{E.1.3})$$

Selle tõestamiseks võib esmalt põhjendada, et

$$R_{\mu\rho}\left(\frac{A}{2}\right)T^{\rho\alpha\sigma}(0)R_{\sigma\nu}\left(\frac{A}{2}\right) = T_{\mu}{}^\alpha{}_\nu(A), \quad (\text{E.1.4})$$

mille jaoks

$$\begin{aligned} & \left(g_{\mu\rho} + \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma_\rho\right)\left(g^{\rho\sigma}\gamma^\alpha + \frac{1}{2}\gamma^\rho\gamma^\alpha\gamma^\sigma\right)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) = \\ & = \left(\delta_\mu^\sigma\gamma^\alpha + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma\right)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) + \frac{A}{2}(\gamma_\mu\gamma^\sigma\gamma^\alpha + 2\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\sigma)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) = \\ & = \gamma^\alpha g_{\mu\nu} + A\delta_\mu^\alpha\gamma_\nu - \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + A\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + \\ & \quad + A\gamma_\mu\delta_\nu^\alpha - \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + \frac{A^2}{2}\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu - A^2\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + A\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu + 2A^2\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu = \\ & = g_{\mu\nu}\gamma^\alpha + A(\gamma_\mu\delta_\nu^\alpha + \delta_\mu^\alpha\gamma_\nu) + \frac{1}{2}(3A^2 + 2A + 1)\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu = T_{\mu}{}^\alpha{}_\nu(A). \end{aligned}$$

Sarnasel viisil saab näidata, et

$$R_{\mu\rho}\left(\frac{A}{2}\right)B^{\rho\sigma}(0)R_{\sigma\nu}\left(\frac{A}{2}\right)=B_{\mu\nu}(A). \quad (\text{E.1.5})$$

Selleks

$$\begin{aligned} & \left(g_{\mu\rho} + \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma_\rho\right)(g^{\rho\sigma} - \gamma^\rho\gamma^\sigma)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) = \\ & = (\delta_\mu^\sigma - \gamma_\mu\gamma^\sigma)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) + \frac{A}{2}(\gamma_\mu\gamma^\sigma - 4\gamma_\mu\gamma^\sigma)\left(g_{\sigma\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\sigma\gamma_\nu\right) = \\ & = g_{\mu\nu} + \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\nu - 2A\gamma_\mu\gamma_\nu + \frac{A}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu + A^2\gamma_\mu\gamma_\nu - 2A\gamma_\mu\gamma_\nu - 4A^2\gamma_\mu\gamma_\nu = \\ & = g_{\mu\nu} + (3A^2 + 3A + 1)\gamma_\mu\gamma_\nu = B_{\mu\nu}(A). \end{aligned}$$

Sellega on näidatud, et faktoriseering (E.1.3) on tõepoolest õige.

Invariantsuse näitamiseks punktteisenduste (2.2.3) suhtes tuleb asendada

$$\mathcal{L}_0 = c\bar{\Psi}^\lambda R_{\lambda}{}^\mu(a)R_{\mu\rho}\left(\frac{A-2a}{2(1+4a)}\right)\mathcal{K}^{\rho\sigma}(p,0)R_{\sigma\nu}\left(\frac{A-2a}{2(1+4a)}\right)R^\nu{}_\kappa(a)\Psi^\kappa. \quad (\text{E.1.6})$$

Võib näidata, et

$$\begin{aligned} R_{\lambda}{}^\mu(a)R_{\mu\rho}\left(\frac{A-2a}{2(1+4a)}\right) &= R_{\lambda\rho}\left(\frac{A}{2}\right), \\ R_{\sigma\nu}\left(\frac{A-2a}{2(1+4a)}\right)R^\nu{}_\kappa(a) &= R_{\sigma\kappa}\left(\frac{A}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{E.1.7})$$

Mõlemad põhjenduskäigud on täiesti analoogilised, võib näiteks valida

$$\begin{aligned} R_{\lambda}{}^\mu(a)R_{\mu\rho}\left(\frac{A-2a}{2(1+4a)}\right) &= (\delta_\lambda^\mu + a\gamma_\lambda\gamma^\mu)\left(g_{\mu\rho} + \frac{A-2a}{2(1+4a)}\gamma_\mu\gamma_\rho\right) = \\ &= g_{\lambda\rho} + \frac{A-2a}{2(1+4a)}\gamma_\lambda\gamma_\rho + a\gamma_\lambda\gamma_\rho + \frac{2a(A-2a)}{1+4a}\gamma_\lambda\gamma_\rho = \\ &= g_{\lambda\rho} + \frac{A-2a+2a(1+4a)+4a(A-2a)}{2(1+4a)}\gamma_\lambda\gamma_\rho = \\ &= g_{\lambda\rho} + \frac{A-2a+2a+8a^2+4aA-8a^2}{2(1+4a)}\gamma_\lambda\gamma_\rho = \\ &= g_{\lambda\rho} + \frac{A(1+4a)}{2(1+4a)}\gamma_\lambda\gamma_\rho = g_{\lambda\rho} + \frac{A}{2}\gamma_\lambda\gamma_\rho. \end{aligned}$$

Peale sobivat indeksi ümbertähistamist jõutakse uuesti faktoriseeritud kujuni (E.1.3). Seega RS lagranžiaan on tõepoolest invariantne punktteisenduste (2.2.3) suhtes.

## E.2 Propagaatori arvutamine

Võib esmalt anda mõned ilmsed kombinatsioonid,

$$\begin{aligned}
 \gamma^\mu p^\nu + \gamma^\nu p^\mu &= \sqrt{3} \not{P} [(P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} - (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu}] + 2 \not{P} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu}, \\
 \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu &= 2 p^\mu \gamma^\nu - \not{P} \gamma^\mu \gamma^\nu, \\
 \gamma^\mu \gamma^\nu &= 3 (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \sqrt{3} [(P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} + (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu}], \\
 p^\mu \gamma^\nu &= \not{P} [\sqrt{3} (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu}].
 \end{aligned} \tag{E.2.1}$$

Nende avaldiste abil on võimalik avaldada lagranžiaani liikmed:

$$\begin{aligned}
 (\not{P} - mc) g_{\mu\nu} &= (\not{P} - mc) [(P^{3/2})_{\mu\nu} + (P_{11}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu}], \\
 A(\gamma_\mu p_\nu + \gamma_\nu p_\mu) &= A \not{P} \{ \sqrt{3} [(P_{21}^{1/2})_{\mu\nu} - (P_{12}^{1/2})_{\mu\nu}] + 2 (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} \}, \\
 \frac{1}{2} (3A^2 + 2A + 1) \gamma_\mu \not{P} \gamma_\nu &= (3A^2 + 2A + 1) \not{P} [\sqrt{3} (P_{21}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} (3A^2 + 2A + 1) \not{P} \cdot \\
 &\quad \cdot \{ 3 (P_{11}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} + \sqrt{3} [(P_{12}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{21}^{1/2})_{\mu\nu}] \}, \\
 (3A^2 + 3A + 1) mc \gamma_\mu \gamma_\nu &= (3A^2 + 3A + 1) mc \{ 3 (P_{11}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{22}^{1/2})_{\mu\nu} + \sqrt{3} [(P_{12}^{1/2})_{\mu\nu} + (P_{21}^{1/2})_{\mu\nu}] \}.
 \end{aligned} \tag{E.2.2}$$

Tehes asendused vaba välja lagranžiaani tensorisse, saab arendada tensori projektsioonioperaatorite baasis. Peale lihtsustamist jõutakse kujuni

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0^{\mu\nu} = & - mc (P^{3/2})^{\mu\nu} + \not{P} (P^{3/2})^{\mu\nu} \\
 & + (9A^2 + 9A + 2) mc (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} - \left( \frac{9}{2} A^2 + 3A + \frac{1}{2} \right) \not{P} (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} \\
 & + 3A(A + 1) mc (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \left( \frac{3}{2} A^2 + 3A + \frac{3}{2} \right) \not{P} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} \\
 & + \sqrt{3} (3A^2 + 3A + 1) mc (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} - \sqrt{3} \left( \frac{3}{2} A^2 + 2A + \frac{1}{2} \right) \not{P} (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} \\
 & + \sqrt{3} (3A^2 + 3A + 1) mc (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} + \sqrt{3} \left( \frac{3}{2} A^2 + 2A + \frac{1}{2} \right) \not{P} (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{E.2.3}$$

Järgmisena võib arendada propagaatori projektsioonioperaatorite baasis,

$$\begin{aligned}
 G^{\mu\nu} = & K_1 (P^{3/2})^{\mu\nu} + K_2 \not{P} (P^{3/2})^{\mu\nu} + L_1 (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} + L_2 \not{P} (P_{11}^{1/2})^{\mu\nu} + M_1 (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + \\
 & + M_2 \not{P} (P_{22}^{1/2})^{\mu\nu} + N_1 (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} + N_2 \not{P} (P_{12}^{1/2})^{\mu\nu} + O_1 (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu} + O_2 \not{P} (P_{21}^{1/2})^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{E.2.4}$$

Siin  $K_1, K_2, \dots$  on reaalarvulised konstandid,  $\not{P}$  on toodud ilmutatult välja.

Propagaator peab vaba välja lagranžiaaniga korrutamisel andma  $(\Lambda_0)_{\mu\rho} G^{\rho\nu} = \delta_\mu^\nu$ . Antud arenduse eesmärk on saada võrrandisüsteem propagaatori tundmatute konstantide arvutamiseks.

Korrutades lagranžiaani tensori läbi arendusega, saab peale lihtsustusi

$$\begin{aligned}
(\Lambda_0)_{\mu\rho}G^{\rho\nu} = & (-mcK_1 + K_2p^2)(P^{3/2})_\mu^\nu + (-mcK_2 + K_1)\not{p}(P^{3/2})_\mu^\nu \\
& [(9A^2 + 9A + 2)mcL_1 - (\frac{9}{2}A^2 + 3A + \frac{1}{2})L_2p^2 + \\
& + \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcO_1 + \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})O_2p^2](P_{11}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [(9A^2 + 9A + 2)mcL_2 - (\frac{9}{2}A^2 + 3A + \frac{1}{2})L_1 - \\
& - \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcO_2 - \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})O_1]\not{p}(P_{11}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [3A(1 + A)mcM_1 + (\frac{3}{2}A^2 + 3A + \frac{3}{2})M_2p^2 + \\
& + \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcN_1 - \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})N_2p^2](P_{22}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [3A(1 + A)mcM_2 + (\frac{3}{2}A^2 + 3A + \frac{3}{2})M_1 - \\
& - \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcN_2 + \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})N_1]\not{p}(P_{22}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [(9A^2 + 9A + 2)mcN_1 - (\frac{9}{2}A^2 + 3A + \frac{1}{2})N_2p^2 + \\
& + \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcM_1 + \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})M_2p^2](P_{12}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [(9A^2 + 9A + 2)mcN_2 - (\frac{9}{2}A^2 + 3A + \frac{1}{2})N_1 - \\
& - \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcM_2 - \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})M_1]\not{p}(P_{12}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [3A(1 + A)mcO_1 + (\frac{3}{2}A^2 + 3A + \frac{3}{2})O_2p^2 + \\
& + \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcL_1 - \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})L_2p^2](P_{22}^{1/2})_\mu^\nu \\
& [3A(1 + A)mcO_2 + (\frac{3}{2}A^2 + 3A + \frac{3}{2})O_1 - \\
& - \sqrt{3}(3A^2 + 3A + 1)mcL_2 + \sqrt{3}(\frac{3}{2}A^2 + 2A + \frac{1}{2})L_1]\not{p}(P_{22}^{1/2})_\mu^\nu \\
= & \delta_\mu^\nu = (P^{3/2})_\mu^\nu + (P_{11}^{1/2})_\mu^\nu + (P_{22}^{1/2})_\mu^\nu.
\end{aligned} \tag{E.2.5}$$

Propagaatori arvutamise eesmärgil võib käsitleda projektsioonioperaatoreid sõltumatutena. Sel juhul on saadud võrrandisüsteemi 10 tundmatuga  $K_1, K_2, \dots, O_2$  ja 10 võrrandiga, mis jaguneb sõltumatuteks alamsüsteemideks  $\{K_1, K_2\}$ ,  $\{L_1, L_2, O_1, O_2\}$  ja  $\{M_1, M_2, N_1, N_2\}$  jaoks. Konstandid  $K_1, K_2$  on otse määratavad, kuid ülejäänud konstandid on suurte võrrandisüsteemide osad. Siiski on süsteem lahenduv, olgugi et mahult üleliigne ilmutatult esitamiseks (vastus on kättesaadav ka arvuti meetoditega), ja tulemus on

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{mc}{p^2 - m^2c^2}, \\
K_2 &= \frac{1}{p^2 - m^2c^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= -\frac{A(1+A)}{mc(1+2A)^2}, & N_1 &= \frac{3A^2+3A+1}{\sqrt{3}mc(1+2A)^2}, \\
L_2 &= \frac{(1+A)^2}{2m^2c^2(1+2A)^2}, & N_2 &= -\frac{(1+A)(1+3A)}{2\sqrt{3}m^2c^2(1+2A)^2}, \\
M_1 &= -\frac{9A^2+9A+2}{3mc(1+2A)^2}, & O_1 &= \frac{3A^2+3A+1}{\sqrt{3}mc(1+2A)^2}, \\
M_2 &= -\frac{9A^2+6A+1}{6m^2c^2(1+2A)^2}, & O_2 &= \frac{(1+A)(1+3A)}{2\sqrt{3}m^2c^2(1+2A)^2}.
\end{aligned}$$

Need on tõepoolest tuntud propagaatori arenduskonstandid (konstantide täpsuseni, mis on osaliselt konventsiooni küsimus), seega (2.3.4) on tõepoolest õige propagaatori avaldis.

## E.3 Üleminekuamplituudide teisendamine

### E.3.1 Verteksi ja propagaatori adjungeerimine

Verteksi adjungeerimine on otsene:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}^{\mu\rho\nu} &= -\frac{i}{\hbar}q\gamma_0[\gamma_0\gamma^\rho\gamma_0g^{\mu\nu} - (\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0g^{\rho\nu} + \gamma_0\gamma^\nu\gamma_0g^{\rho\mu}) + \gamma_0\gamma^\nu\gamma_0\gamma_0\gamma^\rho\gamma_0\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0]\gamma_0 = \\
&= -\frac{i}{\hbar}q[\gamma^\rho g^{\mu\nu} - (\gamma^\mu g^{\rho\nu} + \gamma^\nu g^{\rho\mu}) + \gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu] = -\Gamma^{\nu\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{E.3.1}$$

Propagaatori jaoks saab kirjutada analoogilise tulemuse:

$$\begin{aligned}
\bar{G}^{\mu\nu} &= -\gamma_0 \left[ g^{\nu\mu} - \frac{1}{3}\gamma_0\gamma^\nu\gamma_0\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0 - \frac{1}{3mc}(\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0p^\nu - \gamma_0\gamma^\nu\gamma_0p^\mu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\nu p^\mu \right] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{i\hbar(\gamma_0\not{p}\gamma_0 + mc)}{p^2 - m^2c^2}\gamma_0 = \\
&= - \left[ g^{\nu\mu} - \frac{1}{3}\gamma^\nu\gamma^\mu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\nu p^\mu \right] \frac{i\hbar(\not{p} + mc)}{p^2 - m^2c^2}.
\end{aligned}$$

Et tuua kordaja  $(\not{p} + mc)$  uuesti ette, võib kasutada ära, et

$$\begin{aligned}
\gamma^\nu\gamma^\mu\not{p} &= 2\gamma^\nu p^\mu - \gamma^\nu\not{p}\gamma^\mu = 2\gamma^\nu p^\mu - 2p^\nu\gamma^\mu + \not{p}\gamma^\nu\gamma^\mu, \\
(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu)\not{p} &= (p^\mu p^\nu - p^\nu p^\mu) - \not{p}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) = \not{p}(\gamma^\nu p^\mu - \gamma^\mu p^\nu).
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\bar{G}^{\mu\nu} &= -\frac{i\hbar}{p^2 - m^2c^2} \left\{ \not{p} \left[ g^{\nu\mu} - \frac{1}{3}\gamma^\nu\gamma^\mu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\nu p^\mu - \gamma^\mu p^\nu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\nu p^\mu \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) + mc \left[ g^{\nu\mu} - \frac{1}{3}\gamma^\nu\gamma^\mu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\nu p^\mu \right] \right\} \\
&= -\frac{i\hbar(\not{p} + mc)}{p^2 - m^2c^2} \left[ g^{\nu\mu} - \frac{1}{3}\gamma^\nu\gamma^\mu - \frac{1}{3mc}(\gamma^\nu p^\mu - \gamma^\mu p^\nu) - \frac{2}{3m^2c^2}p^\nu p^\mu \right] = -G^{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{E.3.2}$$

Sarnaselt verteksiga adjungeerimine vahetab indekseid järjekorda.

### E.3.2 Üleminekuamplituudide kombinatsioonide ilmutatud avaldised

$$\overline{|\mathcal{M}_1|^2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}_1|^2} &= \frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \text{Tr} \left[ \Gamma^{\alpha_1 \rho_1 \mu_1} G_{\mu_1 \nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu_1 \sigma_1 \beta_1} \Lambda_{\beta_1 \beta_2}^+(p') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p + \hbar k) \right. \\
&\quad \left. \Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \Lambda_{\alpha_2 \alpha_1}^+(p) g_{\rho_1 \rho_2} g_{\sigma_1 \sigma_2} \right] = \\
&= \frac{2\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k)^2} \\
&\quad \text{Tr} \left\{ \left[ \gamma^{\rho_1} g^{\mu_1 \alpha_1} - (\gamma^{\mu_1} g^{\rho_1 \alpha_1} + \gamma^{\alpha_1} g^{\rho_1 \mu_1}) + \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\rho_1} \gamma^{\mu_1} \right] \right. \\
&\quad (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \left[ g_{\mu_1 \nu_1} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\nu_1} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\mu_1} (p_{\nu_1} + \hbar k_{\nu_1}) - \gamma_{\nu_1} (p_{\mu_1} + \hbar k_{\mu_1})) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{3m^2 c^2} (p_{\mu_1} + \hbar k_{\mu_1})(p_{\nu_1} + \hbar k_{\nu_1}) \right] \right. \\
&\quad \left[ \gamma^{\sigma_1} g^{\beta_1 \nu_1} - (\gamma^{\beta_1} g^{\sigma_1 \nu_1} + \gamma^{\nu_1} g^{\sigma_1 \beta_1}) + \gamma^{\nu_1} \gamma^{\sigma_1} \gamma^{\beta_1} \right] \\
&\quad (\not{p}' + mc) \left[ g_{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{3} \gamma_{\beta_1} \gamma_{\beta_2} - \frac{2}{3m^2 c^2} p'_{\beta_1} p'_{\beta_2} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\beta_1} p'_{\beta_2} - \gamma_{\beta_2} p'_{\beta_1}) \right] \\
&\quad \left[ \gamma^{\sigma_2} g^{\beta_2 \nu_2} - (\gamma^{\beta_2} g^{\sigma_2 \nu_2} + \gamma^{\nu_2} g^{\sigma_2 \beta_2}) + \gamma^{\beta_2} \gamma^{\sigma_2} \gamma^{\nu_2} \right] \\
&\quad (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \left[ g_{\nu_2 \mu_2} - \frac{1}{3} \gamma_{\nu_2} \gamma_{\mu_2} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\nu_2} (p_{\mu_2} + \hbar k_{\mu_2}) - \gamma_{\mu_2} (p_{\nu_2} + \hbar k_{\nu_2})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3m^2 c^2} (p_{\nu_2} + \hbar k_{\nu_2})(p_{\mu_2} + \hbar k_{\mu_2}) \right] \\
&\quad \left[ \gamma^{\rho_2} g^{\mu_2 \alpha_2} - (\gamma^{\mu_2} g^{\rho_2 \alpha_2} + \gamma^{\alpha_2} g^{\rho_2 \mu_2}) + \gamma^{\mu_2} \gamma^{\rho_2} \gamma^{\alpha_2} \right] \\
&\quad \left. (\not{p} + mc) \left[ g_{\alpha_2 \alpha_1} - \frac{1}{3} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_1} - \frac{2}{3m^2 c^2} p_{\alpha_2} p_{\alpha_1} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\alpha_2} p_{\alpha_1} - \gamma_{\alpha_1} p_{\alpha_2}) \right] g_{\rho_1 \rho_2} g_{\sigma_1 \sigma_2} \right\}.
\end{aligned}
\tag{E.3.3}$$



$$\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} &= \frac{2m^2}{\varepsilon_0^2} \text{Tr} \left[ \Gamma^{\alpha_1 \rho_1 \mu_1} G_{\mu_1 \nu_1}(p + \hbar k) \Gamma^{\nu_1 \sigma_1 \beta_1} \Lambda_{\beta_1 \beta_2}^+(p') \Gamma^{\beta_2 \sigma_2 \nu_2} G_{\nu_2 \mu_2}(p - \hbar k') \right. \\
&\quad \left. \Gamma^{\mu_2 \rho_2 \alpha_2} \Lambda_{\alpha_2 \alpha_1}^+(p) g_{\rho_1 \sigma_2} g_{\rho_2 \sigma_1} \right] = \\
&= - \frac{2\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k)(p \cdot k')} \\
&\quad \text{Tr} \left\{ \left[ \gamma^{\rho_1} g^{\mu_1 \alpha_1} - (\gamma^{\mu_1} g^{\rho_1 \alpha_1} + \gamma^{\alpha_1} g^{\rho_1 \mu_1}) + \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\rho_1} \gamma^{\mu_1} \right] \right. \\
&\quad (\not{p} + \hbar \not{k} + mc) \left[ g_{\mu_1 \nu_1} - \frac{1}{3} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\nu_1} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\mu_1} (p_{\nu_1} + \hbar k_{\nu_1}) - \gamma_{\nu_1} (p_{\mu_1} + \hbar k_{\mu_1})) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{3m^2 c^2} (p_{\mu_1} + \hbar k_{\mu_1})(p_{\nu_1} + \hbar k_{\nu_1}) \right] \right. \\
&\quad \left[ \gamma^{\sigma_1} g^{\beta_1 \nu_1} - (\gamma^{\beta_1} g^{\sigma_1 \nu_1} + \gamma^{\nu_1} g^{\sigma_1 \beta_1}) + \gamma^{\nu_1} \gamma^{\sigma_1} \gamma^{\beta_1} \right] \\
&\quad (\not{p}' + mc) \left[ g_{\beta_1 \beta_2} - \frac{1}{3} \gamma_{\beta_1} \gamma_{\beta_2} - \frac{2}{3m^2 c^2} p'_{\beta_1} p'_{\beta_2} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\beta_1} p'_{\beta_2} - \gamma_{\beta_2} p'_{\beta_1}) \right] \\
&\quad \left[ \gamma^{\sigma_2} g^{\beta_2 \nu_2} - (\gamma^{\beta_2} g^{\sigma_2 \nu_2} + \gamma^{\nu_2} g^{\sigma_2 \beta_2}) + \gamma^{\beta_2} \gamma^{\sigma_2} \gamma^{\nu_2} \right] \\
&\quad (\not{p} - \hbar \not{k}' + mc) \left[ g_{\nu_2 \mu_2} - \frac{1}{3} \gamma_{\nu_2} \gamma_{\mu_2} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\nu_2} (p_{\mu_2} - \hbar k'_{\mu_2}) - \gamma_{\mu_2} (p_{\nu_2} - \hbar k'_{\nu_2})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3m^2 c^2} (p_{\nu_2} - \hbar k'_{\nu_2})(p_{\mu_2} - \hbar k'_{\mu_2}) \right] \\
&\quad \left[ \gamma^{\rho_2} g^{\mu_2 \alpha_2} - (\gamma^{\mu_2} g^{\rho_2 \alpha_2} + \gamma^{\alpha_2} g^{\rho_2 \mu_2}) + \gamma^{\mu_2} \gamma^{\rho_2} \gamma^{\alpha_2} \right] \\
&\quad \left. (\not{p} + mc) \left[ g_{\alpha_2 \alpha_1} - \frac{1}{3} \gamma_{\alpha_2} \gamma_{\alpha_1} - \frac{2}{3m^2 c^2} p_{\alpha_2} p_{\alpha_1} - \frac{1}{3mc} (\gamma_{\alpha_2} p_{\alpha_1} - \gamma_{\alpha_1} p_{\alpha_2}) \right] g_{\rho_1 \sigma_2} g_{\rho_2 \sigma_1} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.3.4}$$

# F. FORM

## F.1 FORMi programmi algkood

```
1 Symbol m, q;
2 Vector p1, p2, k1, k2;
3 Index u1, v1, a1, b1, r1, s1, u2, v2, a2, b2, r2, s2;
4
5 On ShortStatistics;
6
7 Local M1 =
8 (g_(1,r1)*d_(a1,u1) - (g_(1,a1)*d_(r1,u1) + g_(1,u1)*d_(r1,a1)) +
9   g_(1,a1,r1,u1)) *
10 (g_(1,p1)+g_(1,k1) + m)*(d_(u1,v1) - 1/3*g_(1,u1,v1) -
11   1/(3*m)*(g_(1,u1)*(p1(v1)+k1(v1)) - g_(1,v1)*(p1(u1)+k1(u1))) -
12   2/(3*m^2)*(p1(u1)+k1(u1))*(p1(v1)+k1(v1))) *
13 (g_(1,s1)*d_(v1,b1) - (g_(1,v1)*d_(s1,b1) + g_(1,b1)*d_(s1,v1)) +
14   g_(1,v1,s1,b1)) *
15 (g_(1,p2) + m)*(d_(b1,b2) - 1/3*g_(1,b1,b2) - 1/(3*m)*(g_(1,b1)*p2(b2) -
16   g_(1,b2)*p2(b1)) - 2/(3*m^2)*p2(b1)*p2(b2)) *
17 (g_(1,s2)*d_(b2,v2) - (g_(1,b2)*d_(s2,v2) + g_(1,v2)*d_(s2,b2)) +
18   g_(1,b2,s2,v2)) *
19 (g_(1,p1)+g_(1,k1) + m)*(d_(v2,u2) - 1/3*g_(1,v2,u2) -
20   1/(3*m)*(g_(1,v2)*(p1(u2)+k1(u2)) - g_(1,u2)*(p1(v2)+k1(v2))) -
21   2/(3*m^2)*(p1(v2)+k1(v2))*(p1(u2)+k1(u2))) *
22 (g_(1,r2)*d_(u2,a2) - (g_(1,u2)*d_(r2,a2) + g_(1,a2)*d_(r2,u2)) +
23   g_(1,u2,r2,a2)) *
24 (g_(1,p1) + m)*(d_(a2,a1) - 1/3*g_(1,a2,a1) - 1/(3*m)*(g_(1,a2)*p1(a1) -
25   g_(1,a1)*p1(a2)) - 2/(3*m^2)*p1(a2)*p1(a1)) *
26 d_(s1,s2)*d_(r1,r2);
27 Local M1M2 =
28 (g_(1,r1)*d_(a1,u1) - (g_(1,a1)*d_(r1,u1) + g_(1,u1)*d_(r1,a1)) +
29   g_(1,a1,r1,u1)) *
30 (g_(1,p1)+g_(1,k1) + m)*(d_(u1,v1) - 1/3*g_(1,u1,v1) -
31   1/(3*m)*(g_(1,u1)*(p1(v1)+k1(v1)) - g_(1,v1)*(p1(u1)+k1(u1))) -
32   2/(3*m^2)*(p1(u1)+k1(u1))*(p1(v1)+k1(v1))) *
```

```

20  (g_(1,s1)*d_(v1,b1) - (g_(1,v1)*d_(s1,b1) + g_(1,b1)*d_(s1,v1)) +
    g_(1,v1,s1,b1)) *
21  (g_(1,p2) + m)*(d_(b1,b2) - 1/3*g_(1,b1,b2) - 1/(3*m)*(g_(1,b1)*p2(b2) -
    g_(1,b2)*p2(b1)) - 2/(3*m^2)*p2(b1)*p2(b2)) *
22  (g_(1,s2)*d_(b2,v2) - (g_(1,b2)*d_(s2,v2) + g_(1,v2)*d_(s2,b2)) +
    g_(1,b2,s2,v2)) *
23  (g_(1,p1)-g_(1,k2) + m)*(d_(v2,u2) - 1/3*g_(1,v2,u2) -
    1/(3*m)*(g_(1,v2)*(p1(u2)-k2(u2)) - g_(1,u2)*(p1(v2)-k2(v2))) -
    2/(3*m^2)*(p1(v2)-k2(v2))*(p1(u2)-k2(u2))) *
24  (g_(1,r2)*d_(u2,a2) - (g_(1,u2)*d_(r2,a2) + g_(1,a2)*d_(r2,u2)) +
    g_(1,u2,r2,a2)) *
25  (g_(1,p1) + m)*(d_(a2,a1) - 1/3*g_(1,a2,a1) - 1/(3*m)*(g_(1,a2)*p1(a1) -
    g_(1,a1)*p1(a2)) - 2/(3*m^2)*p1(a2)*p1(a1)) *
26  d_(s1,r2)*d_(s2,r1);
27
28  Trace4,1;
29  .sort
30
31  Skip;
32  Local M2 = M1*replace_(k1,-k2);
33  .sort
34
35  id p2 = p1 + k1 - k2;
36  id k1.k2 = p1.k1 - p1.k2;
37  id p1.p1 = m^2;
38  id k1.k1 = 0;
39  id k2.k2 = 0;
40  .sort
41
42  Local M =
43  q^4/(16*(p1.k1)^2)*M1 +
44  q^4/(16*(p1.k2)^2)*M2 -
45  2*q^4/(16*(p1.k1)*(p1.k2))*M1M2;
46
47  Print +s;
48  .end

```

## F.2 FORMi tulemused

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \left[ \frac{784}{81} + \frac{8}{27}(p \cdot k)^{-2}(p \cdot k')^2 + 4(p \cdot k)^{-2} \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} \right. \\
& - 8(p \cdot k)^{-1}(p \cdot k')^{-1} \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} - \frac{92}{81}(p \cdot k)^{-1}(p \cdot k') - \frac{32}{81}(p \cdot k)^{-1}(p \cdot k')^2 \frac{\hbar}{m^2 c^2} \\
& + \frac{40}{27}(p \cdot k)^{-1}(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} + 8(p \cdot k)^{-1} \frac{m^2 c^2}{\hbar} - \frac{92}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^{-1} \\
& - \frac{496}{81}(p \cdot k)(p \cdot k') \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} + \frac{272}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} + \frac{32}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^4}{m^8 c^8} \\
& + \frac{736}{81}(p \cdot k) \frac{\hbar}{m^2 c^2} + \frac{8}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^{-2} + \frac{32}{81}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^{-1} \frac{\hbar}{m^2 c^2} \\
& - \frac{272}{81}(p \cdot k)^2(p \cdot k') \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} + \frac{352}{81}(p \cdot k)^2 \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} + \frac{40}{27}(p \cdot k)^3(p \cdot k')^{-1} \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} \\
& + \frac{32}{81}(p \cdot k)^3(p \cdot k') \frac{\hbar^4}{m^8 c^8} + \frac{16}{27}(p \cdot k)^3 \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} + 4(p \cdot k')^{-2} \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} \\
& - 8(p \cdot k')^{-1} \frac{m^2 c^2}{\hbar} - \frac{736}{81}(p \cdot k') \frac{\hbar}{m^2 c^2} + \frac{352}{81}(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} \\
& \left. - \frac{16}{27}(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} \right] 16\pi^2 \alpha_q^2,
\end{aligned} \tag{F.2.1a}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}_1|^2 = & \left[ 64m^4 c^4 - \frac{64}{3}(p \cdot k)(p \cdot k') \hbar^2 + \frac{128}{27}(p \cdot k)(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} \right. \\
& + \frac{128}{9}(p \cdot k)(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} + 64(p \cdot k)m^2 c^2 \hbar - \frac{1792}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k') \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} \\
& + \frac{1024}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} + \frac{2944}{27}(p \cdot k)^2 \hbar^2 - \frac{7552}{81}(p \cdot k)^3(p \cdot k') \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} \\
& + \frac{512}{27}(p \cdot k)^3(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} + 128(p \cdot k)^3 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} - \frac{3328}{81}(p \cdot k)^4(p \cdot k') \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \\
& + \frac{1024}{9}(p \cdot k)^4 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} + \frac{512}{81}(p \cdot k)^5(p \cdot k') \frac{\hbar^6}{m^8 c^8} + \frac{256}{9}(p \cdot k)^5 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \\
& \left. + \frac{128}{27}(p \cdot k')^2 \hbar^2 \right] \frac{\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k)^2},
\end{aligned} \tag{F.2.1b}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}_2|^2 = & \left[ 64m^4 c^4 - \frac{64}{3}(p \cdot k)(p \cdot k') \hbar^2 + \frac{1792}{27}(p \cdot k)(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} \right. \\
& - \frac{7552}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} + \frac{3328}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^4 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} + \frac{512}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^5 \frac{\hbar^6}{m^8 c^8} \\
& - \frac{128}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k') \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} + \frac{1024}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} - \frac{512}{27}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \\
& + \frac{128}{27}(p \cdot k)^2 \hbar^2 + \frac{128}{9}(p \cdot k)^3(p \cdot k') \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} - 64(p \cdot k')m^2 c^2 \hbar \\
& + \frac{2944}{27}(p \cdot k')^2 \hbar^2 - 128(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} + \frac{1024}{9}(p \cdot k')^4 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} \\
& \left. - \frac{256}{9}(p \cdot k')^5 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \right] \frac{\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2 (p \cdot k')^2},
\end{aligned} \tag{F.2.1c}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2} = & \left[ 64m^4 c^4 + \frac{2560}{81}(p \cdot k)(p \cdot k') \hbar^2 - \frac{1984}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} \right. \\
& + \frac{3328}{81}(p \cdot k)(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} - \frac{256}{27}(p \cdot k)(p \cdot k')^4 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} + 32(p \cdot k)m^2 c^2 \hbar \\
& + \frac{1984}{81}(p \cdot k)^2(p \cdot k') \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} - \frac{3584}{81}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} + \frac{256}{81}(p \cdot k)^2(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \\
& - \frac{128}{81}(p \cdot k)^2 \hbar^2 + \frac{3328}{81}(p \cdot k)^3(p \cdot k') \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} - \frac{256}{81}(p \cdot k)^3(p \cdot k')^2 \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} \\
& - \frac{448}{81}(p \cdot k)^3 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} + \frac{256}{27}(p \cdot k)^4(p \cdot k') \frac{\hbar^5}{m^6 c^6} - \frac{128}{27}(p \cdot k)^4 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} \\
& - 32(p \cdot k')m^2 c^2 \hbar - \frac{128}{81}(p \cdot k')^2 \hbar^2 + \frac{448}{81}(p \cdot k')^3 \frac{\hbar^3}{m^2 c^2} \\
& \left. - \frac{128}{27}(p \cdot k')^4 \frac{\hbar^4}{m^4 c^4} \right] \frac{\pi^2 \alpha_q^2}{\hbar^2(p \cdot k)(p \cdot k')}.
\end{aligned} \tag{F.2.1d}$$

Sümmeetrilisemas esituses summaarne keskmistatud üleminekuamplituud

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \frac{64\pi^2 \alpha_q^2}{81} \left\{ 196 - 124(p \cdot k)(p \cdot k') \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} - 162 \frac{1}{(p \cdot k)(p \cdot k')} \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} \right. \\
& + 162 \left[ \frac{1}{(p \cdot k)} - \frac{1}{(p \cdot k')} \right] \frac{m^2 c^2}{\hbar} + 81 \left[ \frac{1}{(p \cdot k)^2} + \frac{1}{(p \cdot k')^2} \right] \frac{m^4 c^4}{\hbar^2} \\
& - 23 \left[ \frac{(p \cdot k)}{(p \cdot k')} + \frac{(p \cdot k')}{(p \cdot k)} \right] + 6 \left[ \frac{(p \cdot k)^2}{(p \cdot k')^2} + \frac{(p \cdot k')^2}{(p \cdot k)^2} \right] \\
& + 8 \left[ \frac{(p \cdot k)^2}{(p \cdot k')} - \frac{(p \cdot k')^2}{(p \cdot k)} \right] \frac{\hbar}{m^2 c^2} + 30 \left[ \frac{(p \cdot k)^3}{(p \cdot k')} + \frac{(p \cdot k')^3}{(p \cdot k)} \right] \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} \\
& + 68 [(p \cdot k)(p \cdot k')^2 - (p \cdot k)^2(p \cdot k')] \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} \\
& + 8 [(p \cdot k)(p \cdot k')^3 + (p \cdot k)^3(p \cdot k')] \frac{\hbar^4}{m^8 c^8} \\
& + 184 [(p \cdot k) - (p \cdot k')] \frac{\hbar}{m^2 c^2} + 88 [(p \cdot k)^2 + (p \cdot k')^2] \frac{\hbar^2}{m^4 c^4} \\
& \left. + 12 [(p \cdot k)^3 - (p \cdot k')^3] \frac{\hbar^3}{m^6 c^6} \right\}.
\end{aligned} \tag{F.2.2}$$

## G. Diferentsiaalse mõjuristlõike teisenemine

Diferentsiaalsete mõjuristlõigete jaotuste jaoks kehtib

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{CM}} = \frac{d\sigma}{d\Omega_{lab}} \frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{CM}}. \quad (G.1)$$

Seega on seotud mõjuristlõigete jaotus kahes taustsüsteemis, kui on arvatud tuletis  $\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{CM}}$ . Võib kirjutada

$$\frac{d\Omega_{lab}}{d\Omega_{CM}} = \frac{d \cos \theta_{lab}}{d \cos \theta_{CM}} \frac{d\varphi_{lab}}{d\varphi_{cm}} = \frac{d \cos \theta_{lab}}{d \cos \theta_{CM}}, \quad (G.2)$$

kus on sümmeetriakaalutlustel taandatud  $\frac{d\varphi_{lab}}{d\varphi_{cm}} = 1$ .

Liikugu hajuv osake (footon) piki  $z$ -telge sihtmärgi suunas laboratooriumi taustsüsteemis. Võib defineerida 4-vektorid osakese ja footoni jaoks

$$\begin{aligned} p_{lab}^\mu &= \left( \frac{E_{p,lab}}{c}, 0, 0, 0 \right), & p_{CM}^\mu &= \left( \frac{E_{p,CM}}{c}, 0, 0, -p_{CM} \right), \\ k_{lab}^\mu &= \left( \frac{E_{k,lab}}{c}, 0, 0, k_{lab} \right), & k_{CM}^\mu &= \left( \frac{E_{k,CM}}{c}, 0, 0, p_{CM} \right), \\ k_{lab}'^\mu &= \left( \frac{E_{k,lab}'}{c}, 0, k_{lab}' \sin \theta_{lab}, k_{lab}' \cos \theta_{lab} \right), & k_{CM}'^\mu &= \left( \frac{E_{k,CM}'}{c}, 0, k_{CM}' \sin \theta_{CM}, k_{CM}' \cos \theta_{CM} \right), \end{aligned}$$

kus ilma priimita on tähistatud algseisundis ja priimiga lõppseisundis osakesi,  $k$  ei ole antud juhul lainevektor, vaid impulsivektor, ja  $\theta$  on hajumisnurk. Sümmeetria tõttu võib vaadata hajumist  $yz$ -tasandil.

Võib teostada Lorentzi tõuke  $z$ -telje sihis, et minna üle laboratooriumi süsteemist massi-keskme süsteemi. Tulemusena on

$$\begin{aligned} p_{lab \rightarrow CM}^\mu &= \left( \frac{E_{p,lab}}{c} \cosh \chi, 0, 0, -\frac{E_{p,lab}}{c} \sinh \chi \right) = p_{CM}^\mu, \\ k_{lab \rightarrow CM}^\mu &= \left( \frac{E_{k,lab}}{c} \cosh \chi - k_{lab} \sinh \chi, 0, 0, -\frac{E_{k,lab}}{c} \sinh \chi + k_{lab} \cosh \chi \right) = k_{CM}^\mu, \\ k_{lab \rightarrow CM}'^\mu &= \left( \frac{E_{k,lab}'}{c} \cosh \chi - k_{lab}' \cos \theta \sinh \chi, 0, k_{lab}' \sin \theta_{lab}, -\frac{E_{k,lab}'}{c} \sinh \chi + k_{lab}' \cos \theta_{lab} \cosh \chi \right) = \\ &= k_{lab}'^\mu. \end{aligned}$$

Nüüd saab lugeda välja

$$p_{\text{CM}} = \frac{E_{p,\text{lab}}}{c} \sinh \chi = -\frac{E_{k,\text{lab}}}{c} \sinh \chi + k_{\text{lab}} \cosh \chi$$

ehk

$$\tanh \chi = \frac{ck_{\text{lab}}}{E_{p,\text{lab}} + E_{k,\text{lab}}} \quad (\text{G.3})$$

ja analoogiliselt

$$k'_{\text{CM}} = \frac{1}{\sin \theta_{\text{CM}}} k'_{\text{lab}} \sin \theta_{\text{lab}} = \frac{1}{\cos \theta_{\text{CM}}} \left( -\frac{E'_{k,\text{lab}}}{c} \sinh \chi + k'_{\text{lab}} \cos \theta_{\text{lab}} \cosh \chi \right),$$

millest

$$\tan \theta_{\text{CM}} = \frac{k'_{\text{lab}} \sin \theta_{\text{lab}}}{-\frac{E'_{k,\text{lab}}}{c} \sinh \chi + k'_{\text{lab}} \cos \theta_{\text{lab}} \cosh \chi}. \quad (\text{G.4})$$

Siit jätkates on võimalik arvutada tuletis. Näiteks  $\cos \theta_{\text{CM}}$  jaoks võib arvestada, et  $\cos \arctan(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ . Peale võrdlemisi pikka arvutust, saab tulemuseks, et

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{\text{lab}}}{d\Omega_{\text{CM}}} &= \left( -\frac{d \cos \theta_{\text{CM}}}{d\theta_{\text{lab}}} \frac{1}{\sin \theta_{\text{lab}}} \right)^{-1} = \\ &= \frac{\left[ \left( k'_{\text{lab}} \cos \theta_{\text{lab}} \cosh \chi - \frac{E'_{k,\text{lab}}}{c} \sinh \chi \right)^2 + k'^2_{\text{lab}} \sin^2 \theta_{\text{lab}} \right]^{\frac{3}{2}}}{k'^2_{\text{lab}} \left( k'_{\text{lab}} \cosh \chi - \frac{E'_{k,\text{lab}}}{c} \cos \theta_{\text{lab}} \sinh \chi \right)}. \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Valemit on võimalik lihtsustada, sest footonite jaoks  $\frac{E'_{k,\text{lab}}}{c} = k'_{\text{lab}} = \frac{\hbar\omega'}{c}$ . Peale niisugust asendust, on tulemuseks

$$\frac{d\Omega_{\text{lab}}}{d\Omega_{\text{CM}}} = \frac{[(\cos \theta_{\text{lab}} \cosh \chi - \sinh \chi)^2 + \sin^2 \theta_{\text{lab}}]^{\frac{3}{2}}}{\cosh \chi - \cos \theta_{\text{lab}} \sinh \chi}. \quad (\text{G.6})$$

Antud hajumisprotsessi jaoks kehtib ka valem

$$\chi = \operatorname{arctanh} \frac{\hbar\omega}{mc^2 + \hbar\omega}. \quad (\text{G.7})$$

Nende teisenemisseoste abil on võimalik siduda masskeskme süsteemi tulemused laboratooriumi taustsüsteemiga. Kui arvestada, et  $\cosh \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ja  $\sinh \operatorname{arctanh} x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , saab peale lihtsustamist anda lõppkuju

$$\frac{d\Omega_{\text{lab}}}{d\Omega_{\text{CM}}} = \frac{(mc^2 + \hbar\omega - \hbar\omega \cos \theta_{\text{lab}})^2}{mc^2(mc^2 + 2\hbar\omega)}. \quad (\text{G.8})$$





# **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Ernest Michael Priidik Gallagher,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose  $\text{Spinn-}\frac{3}{2}$  osakeste Comptoni hajumine Rarita-Schwingeri teoorias, mille juhendaja on Stefan Groote,
  - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 31.05.2018.